

MATEMATIKA, CSILLAGÁSZAT

*A NYME SAVARIA EGYETEMI KÖZPONT
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI XXI.
TERMÉSZETTUDOMÁNYOK 16.
Szombathely, 2016. pp. 5-22.*

PÉNTEK KÁLMÁN ¹

A PHILIPPE DE LA HIRE-FÉLE VETÜLETEN ALAPULÓ ASZTROLÁBIUM ÉS CSILLAGÁSZATI TANESZKÖZ

Abstract: In the paper we present a specific version of the spherical astronomy tool – called rotatable daily arc plate (universal astrolabe) – which represents the moving of the Sun in the sky and which was made by Philippe de la Hire (1640-1718) in 1701. The modern and improved version was designed by the author of this paper. We present the most important astronomical and geographical processes, which we can easily solve by the using of this tool.

1. Bevezetés

Az asztrolábium az éggömb egy lapos korong alakú működő modellje. Segítségével egyrészt meghatározhatjuk az égitestek helyzetét mérésrel az égbolton, másrészt mint analóg számolóeszkővel megoldhatunk számos fontos szférikus csillagászati alapfeladatot. Az asztrolábium alkalmas továbbá geodéziai és mérnöki feladatok megoldására is.

Megkülönböztetünk tengerészeti és csillagászati asztrolábiumot, mivel az első inkább tengerészeti, a második főleg csillagászati feladatok megoldására szolgált. A tengerészeti asztrolábiumot egy korong és forgatható alhidád (vonalzó) két réssel (nézőke) alkotja, egyszerű robusztus konstrukció az égitestek magasságának meghatározására, méréskor felfüggesztették, általában díszítés nélkül készítették. A csillagászati asztrolábium több egymáson elforduló korong, az éggömböt ábrázolja síkban művészi kivitelezésben. Lehet planiszférikus asztrolábium, amely egy adott földrajzi szélességen használható és alapelve hasonló a mai forgatható csillagtérképekhez, vagy univerzális asztrolábium, amely minden földrajzi szélességen használható analóg számolóeszköz és az éggömb síkbeli képe.

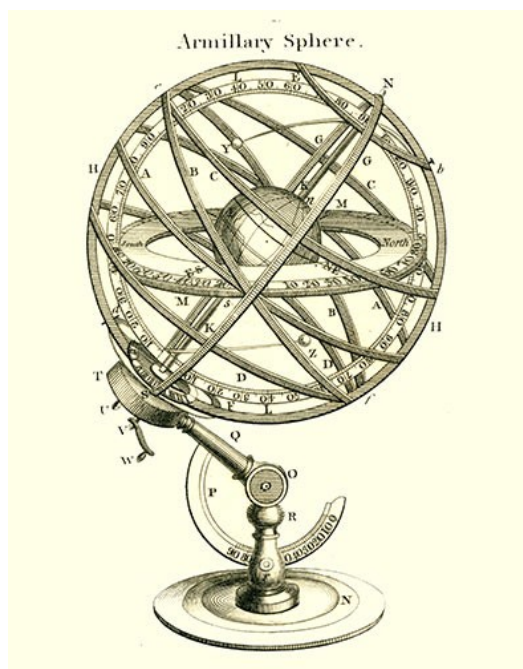
Az asztrolábium minden valószínűség szerint az éggömb térbeli modelljének, az armilláris szférának a síkbeli vetületeként született meg. Az armilláris szféra egy körgyűrűkből álló csillagászati eszköz. Neve a latin

¹ NYME, Savaria Egyetemi Központ, Természettudományi Kar, Matematika Intézeti Tanszék.
9700 Szombathely, Károlyi G. tér 4. E-mail: pentek.kalman@nyme.hu

armilla szóból ered, amelynek jelentése: karperec. Az első armilláris gömböt Eratoszthenész (Kr. e. 276 – Kr. e. 194) görög matematikus, földrajztudós és csillagász, az Alexandriai Könyvtár igazgatója alkotta meg Kr. e. 255-ben. Nevéhez fűződik a Föld sugarának meghatározása, valamint a prímszámok kiválogatására szolgáló eljárás kidolgozása is. Egyes szerzők Hipparkhosznak tulajdonítják megalkotását. Az armilláris gömböt alkotó gyűrűk az éggömb legfontosabb köreit (horizont, meridián, égi egyenlítő, ráktérítő, baktérítő, ekliptika, napfordulati és napéjegyenlőségi kolúrok) jelenítik meg.

Megjegyezzük, hogy a kevésbé ismert napéjegyenlőségi kolúr az éggömbnek az égi pólusokon, valamint az ekliptika tavasz- és ősypontján áthaladó gömbi főköre. A napfordulati kolúr pedig az éggömbnek az égi pólusokon, továbbá az ekliptika nyár- és télpontján áthaladó gömbi főköre. A két kolúr síkja merőleges egymásra, s mindketten merőlegesek az égi egyenlítő síkjára.

A horizont, a meridián és az égi egyenlítő gyűrűjét a szögek mérésére alkalmas skálabeosztással is ellátták. A szerkezet középpontjában a Földgömböt ábrázoló golyó helyezkedik el, amely a világtengelyen keresztül kapcsolódik az éggömb köreihez (1. ábra).



1. ábra: Az armilláris szféra
Figure 1. The armillary sphere

A sztereografikus projekciót, mint a gömbnek síkra történő szögtartó és körtartó leképezését már az ókori egyiptomiak is ismerték a Kr. e 3. században planiszférikus projekció néven. E leképezés felhasználásával, a pólusba helyezve a vetítési centrumot az égi egyenlítő síkjára vetíthetjük az armilláris szféra köreit. Ezt a leképezést sztereografikus ekvatoriális projekciónak nevezzük. Ezzel megszületett az asztrolábium alap gondolata.

A planiszférikus asztrolábiumot a Pergai Apollóniosz (Kr. e. 265 – Kr. e. 190) Alexandriában tevékenykedő görög matematikus és csillagász alkotta meg. Egyes szerzők ennek megalkotását is Hipparkhosznak tulajdonítják. Apollóniosz fő műve a 8 kötetes Konika (kúpelemek), 4 kötete eredetiben, a többi arab fordításban maradt ránk. Ebben kidolgozta a kúpszeletek elméletét, munkásságáért már kortársaitól a Megasz Geometrosz (nagy geométer) melléknevet kapta. Vélhetően Apollóniosz munkájára támaszkodott Johannes Kepler, amikor a 17. század első éveiben kidolgozta híres bolygómozgási törvényeit.

Fontos megemlékeznünk Hipparkhosz (Kr. e. 160 – Kr. e. 125) eredményeiről, aki az egyik legnagyobb görög csillagász volt. Rodoszon és Alexandriában tanított, felismerte a precessziót, összeállította az álló csillagok katalógusát fényrendjük szerint, ami a mai osztályozásuknak is az alapja, valamint ami most számunkra lényeges, hogy tökéletesítette a planiszférikus asztrolábiumot.

A planiszférikus asztrolábium rögzített földrajzi szélességen ábrázolja az égboltot sztereografikus ekvatoriális vetületben. Segítségével megoldhatók a korong alakú, szögskálákkal ellátott eszköz egyes részeinek alkalmas elforgatásával és beállításával a szférikus csillagászat klasszikus alapfeladatai. Ezek a készülékek művészi finomságú kivitelben fémből készültek, s használatukkal a matematikusok, csillagászok és mérnökök oldották meg a felvetődött problémákat. A műszert a középkorban arab matematikusok és csillagászok is használták és tökéletesítették tovább.

A planiszférikus asztrolábium részei: a mater (az asztrolábium alapja), a timpanonok (cserélhető betét korongok), a rete (az ekliptika képével és fontos, fényesebb csillagokra mutató kampókkal) és az irányzék (forgatható vonalzó a szögbeosztás pontosabb leolvasásához) (2. ábra).

Az asztrolábium tetszőleges földrajzi szélességen is használható tökéletesített változatát – az univerzális asztrolábiumot – Abu Ishaq Ibrahim al-Zarqali (1029–1087) és Gemma Frisius (1508–1588) dolgozta ki. Az al-Zarqali-féle asztrolábium „Saphea Arzachelis” néven vált ismertté Európában. A műszer vetületi rendszere itt is a sztereografikus projekció volt, azonban a korábbival szemben új, meridionális nézetben (3. ábra),

amely leképezést a továbbiakban sztereografikus meridionális projekciónak nevezzük.



2. ábra: A planiszférikus asztrólabium
Figure 2. The planispheric astrolabe

Az univerzális asztrólabium egy másik változatát fejlesztette ki és mutatta be 1551-ben megjelent művében Juan de Rojas y Sarmiento, aki ortografikus vetületet alkalmazott szintén meridionális nézetben (4. ábra), amelyet a továbbiakban ortografikus meridionális projekciónak nevezzük.

Az univerzális asztrólabiumok mindkét változata a keleti, illetve a nyugati fél éggömböt a meridián síkjára vetítve kettős rétegben, mintegy oldalnézetben, meridionálisan ábrázolja az éggömböt. Az égi egyenlítő képe mentén elhelyezkedő szögskála sztereografikus projekció esetén az asztrólabium korongjának pereme felé ritkul (3. ábra), amíg ortografikus projekció esetén a perem felé haladva sűrűsödik (4. és 7. ábra) az egyes vetületi rendszerek sajátosságaiból adódóan. A leolvasási pontosságot figyelembe véve az asztrólabium használata viszont a végig jó közelítéssel lineáris skála esetén lett volna eredményesebb.

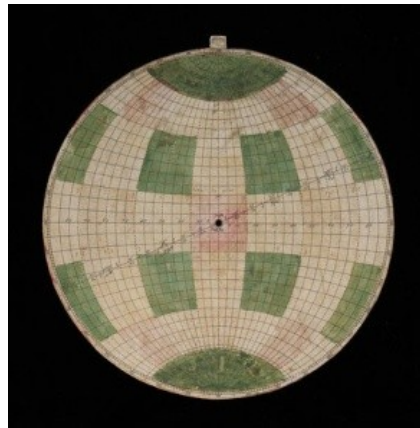
A kvázilineáris skálázás problémáját Philippe de la Hire (1640–1718) francia matematikus, csillagász és térképész oldotta meg, amikor 1701-ben publikálta a meridionális perspektív projekción alapuló univerzális asztrólabiumát. Magát az eszközt Nicolas Bion (1652–1733) francia műszertervező és finommechanikus készítette el (5. ábra).



3. ábra: Az Al-Zarqali és Frisius-féle univerzális asztrolábium
 Figure 3. The Universal Astrolabe type Al-Zarqali and Frisius



4. ábra. A Rojas-féle univerzális asztrolábium
 Figure 4. The Universal Astrolabe de Rojas

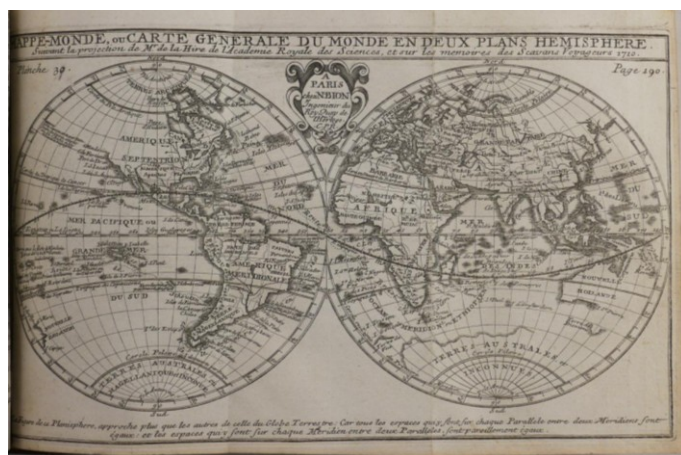


5. ábra: A Philippe de la Hire-féle univerzális asztrolábium
 Figure 5. The Universal Astrolabe de la Hire

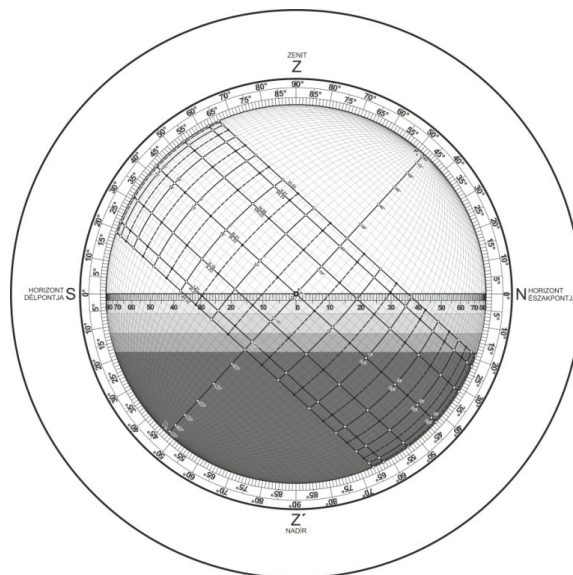
A pontosabb írásbeli csillagászati számítások és navigációs műszerek, például a tükrös szextáns elterjedésével, valamint a logaritmus használatával az asztrolábiumok veszítettek jelentőségükből, háttérbe szorultak, viszont Philippe de la Hire vetületi rendszerét több világtérképen is eredményesen alkalmazták (HOLLANDER 1999, MORRISON 2010) (6. ábra).

A XIX. század második felében a közép- és felsőfokú oktatásban megjelentek az univerzális asztrolábiumok szerkesztési elvein alapuló, általában kartonból készített és nyomdai úton sokszorosított csillagászati

tanesszközök. Francia és német mintára hazánkban a Rojas-féle asztrolábiumon alapuló, ortografikus meridionális vetületi rendszerben működő forgatható korongot fejlesztett ki Lóskay Miklós 1904-ben (LÓSKAY 1904). A Kogutowicz Manó által vezetett Magyar Földrajzi Intézet Rt. által gyártott korongnak „A Nap és a csillagok járása a Föld tetszőleges helyén” címet adta. Korongjához útmutató füzetet Kövesligethy Radó (1862–1934) csillagász és geofizikus készített 1903-ban (KÖVESLIGETHY 1903).



6. ábra: A Philippe de la Hire-féle világtérkép
Figure 6. The World map of Philippe de la Hire



7. ábra: A Lóskay-féle forgatható korong modern változata
Figure 7. The modern version of the rotatable daily arc plate of M. Lóskay

A Lóskay-féle korong átdolgozott modern változatát (7. ábra) e dolgozat szerzője készítette el 2012-ben (PÉNTEK 2012). Jelen dolgozatunkban a Philippe de la Hire-féle meridionális projekción alapuló taneszközt mutatjuk be.

2. A planiszférikus asztrolábium

Az egységnyi sugarúnak ($R=1$) tekintett éggömb analitikus jellemzésére alkalmazzunk 2. típusú ekvatoriális koordinátákat, az α rektaszcenziót és a δ deklinációt. A további számításainkhoz rögzítsünk olyan térbeli Descartes-féle koordinátarendszert, amelynek kezdőpontja az éggömb O középpontja, x -tengelye az égi egyenlítő kezdőpontjába – a tavaszpontba, y -tengelye a nyári napforduló égi egyenlítőre eső vetületi pontjába, z -tengelye pedig az éggömb P_N égi északi pólusának irányába mutasson.

Az éggömb felületén levő tetszőleges $P(\alpha, \delta)$ pont Descartes-féle $P(x, y, z)$ koordinátái egyszerű megfontolással nyerhetők Gauss nyomán a következő transzformációkkal:

$$\begin{aligned}x &= R \cdot \cos\delta \cdot \cos\alpha \\y &= R \cdot \cos\delta \cdot \sin\alpha, \\z &= R \cdot \sin\delta\end{aligned}$$

s mivel $R=1$, ezért a következőt írhatjuk:

$$P(\cos\delta \cdot \cos\alpha, \cos\delta \cdot \sin\alpha, \sin\delta); \quad (-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ, 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ)$$

alakban.

Vetítsük most az éggömböt a $P_S(0, 0, -1)$ égi déli pólusból, mint vetítési centrumból centrálisan a koordinátarendszer $z = 0$ egyenlettel leírható xy síkjára. Ebben az esetben a szokványosnak mondható érintő képsíkos vetítés helyett – ahol a képsík az északi pólushoz illeszkedik – itt az xy síkba történő sztereografikus vetítésről van szó. E vetítés leképezési egyenleteinek levezetéséhez a $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_S P}$ irányvektor koordinátái

$$\mathbf{v}(\cos\delta \cdot \cos\alpha, \cos\delta \cdot \sin\alpha, \sin\delta + 1),$$

a $P_S P$ vetítősugár egy alkalmasan rögzített pontja célszerűen $\mathbf{r}_0(0, 0, -1)$ helyvektorral fejezhető ki, akkor $P_S P$ egyenes $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ paraméteres vektoregyenlete koordinátás alakba írva

$$(1) \quad (x, y, z) = (0, 0, -1) + t \cdot (\cos\delta \cdot \cos\alpha, \cos\delta \cdot \sin\alpha, \sin\delta + 1) \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol $\mathbf{r}(x, y, z)$ az egyenes egy tetszőleges pontjának helyvektora.
Az (1) összefüggés átrendezésével és koordinátánként történő felírásával a

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= t \cdot \cos \delta \cdot \cos \alpha \\ y &= t \cdot \cos \delta \cdot \sin \alpha \\ z + 1 &= t(\sin \delta + 1) \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelyből

$$(3) \quad \frac{x}{\cos \delta \cdot \cos \alpha} = \frac{y}{\cos \delta \cdot \sin \alpha} = \frac{z+1}{\sin \delta + 1} (= t)$$

adódik. A (3) első és a harmadik, illetve a második és a harmadik tört egyenlőségéből

$$(4) \quad \frac{x}{\cos \delta \cdot \cos \alpha} = \frac{z+1}{\sin \delta + 1}, \quad \frac{y}{\cos \delta \cdot \sin \alpha} = \frac{z+1}{\sin \delta + 1}$$

következik. A $P_S P$ vetítősugár és a $z = 0$ képsík $P'(x', y')$ metszéspontjának meghatározására helyettesítsük a (4) egyenletekbe a $z = 0$ értéket, így

$$(5) \quad \frac{x'}{\cos \delta \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \delta + 1}, \quad \frac{y'}{\cos \delta \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \delta + 1}$$

következik, amelyek egyszerű átrendezésével nyerjük az

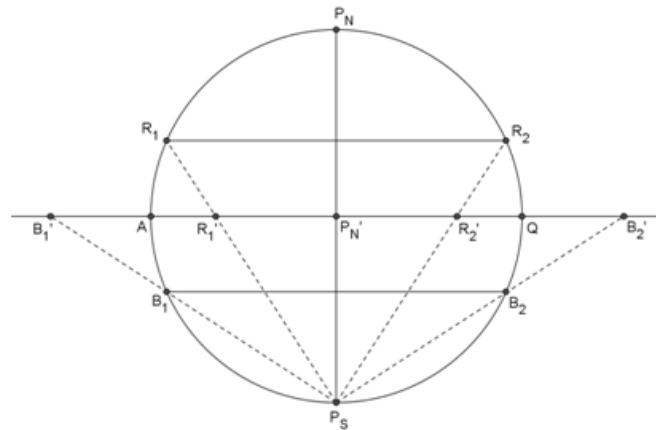
$$(6) \quad x' = \frac{\cos \delta \cdot \cos \alpha}{\sin \delta + 1}, \quad y' = \frac{\cos \delta \cdot \sin \alpha}{\sin \delta + 1}$$

összefüggéseket, amelyeket a planiszférikus asztrolábium leképezési egyenleteinek nevezünk.

A P_S pontból történő vetítés eredményeként elsőként megkaphatjuk a ráktérítő, baktérítő és az égi egyenlítő képét a timpanon rétegen. Ezek koncentrikus körökként jelennek meg az asztrolábiumon, középpontban az északi pólussal. Ezek függetlenek a földrajzi szélességtől (8. ábra).

Hasonlóképpen a P_S pontból történő vetítéssel meghatározhatjuk egy rögzített φ földrajzi szélességű helyen tartózkodó megfigyelő számára az éggömb lényeges pontjainak (pl. zenitpont) és fontos köreinek (horizontvonal, almukantarátok és azimutális körök) vetületeit (9. ábra).

A planiszférikus asztrolábium részletes ismertetése és a velük megoldható szférikus csillagászati feladatok megtalálhatók *HOLLANDER* (1999) és *MORRISON* (2010) művében.



8. ábra: Az éggömb sztereografikus ekvatoriális projekciója I.

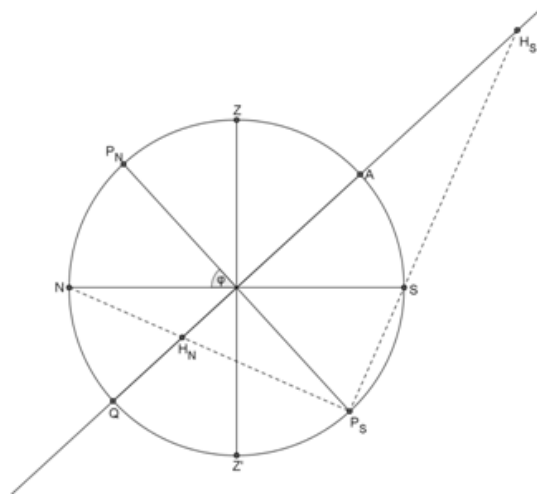
Magyarázat: P_N = égi északi pólus, P_S = égi déli pólus, AQ = égi egyenlítő, R_1R_2 = ráktérítő,

B_1B_2 = baktérítő, $R_1'R_2'$ = R_1R_2 vetülete, $B_1'B_2'$ = B_1B_2 vetülete

Figure 8. Stereographic equatorial projection of the skyglobe I.

Legend: P_N = North Pole, P_S = South Pole, AQ = Celestial Equator, R_1R_2 = Tropic Cancer,

B_1B_2 = Tropic Capricorn, $R_1'R_2'$ = projection of R_1R_2 , $B_1'B_2'$ = projection of B_1B_2



9. ábra: Az éggömb sztereografikus projekciója II.

Magyarázat: P_N = égi északi pólus, P_S = égi déli pólus, AQ = égi egyenlítő, ZZ' = zenit - nadir vonal, S = horizont délpontja, N = horizont északpontja, H_NH_S = NS vetülete

Figure 9. Stereographic equatorial projection of the skyglobe II.

Legend: P_N = North Pole, P_S = South Pole, AQ = Celestial Equator, ZZ' = Zenith - Nadir Line, S = South Horizon, N = North Horizon, H_NH_S = projection of NS

3. Az univerzális asztrolábiumok

Az egységnyi sugarú éggömb pontjainak analitikus leírására alkalmazzunk most is (α, δ) ekvatoriális koordinátákat, s vezessük be az előző részben bemutatott Descartes-féle koordinátarendszert.

Vetítsük a

$$P(\cos \delta \cdot \cos \alpha, \cos \delta \cdot \sin \alpha, \sin \delta) \quad -90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ, 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

Descartes koordinátákkal jellemzett fél éggömb tetszőleges pontját a $C(0, -d, 0)$ ($d \geq 1$) pontból centrálisan a koordinátarendszer $y = 0$ egyenlettel leírható xz síkjára. E leképezés leíró egyenleteinek előállításához a $\mathbf{v} = \overrightarrow{CP}$ irányvektor koordinátái

$$\mathbf{v}(\cos \delta \cdot \cos \alpha, \cos \delta \cdot \sin \alpha + d, \sin \delta),$$

a CP vetítősugár egy alkalmas rögzített pontja célszerűen $\mathbf{r}_0(0, -d, 0)$ helyvektorral fejezhető ki, ekkor a CP egyenes $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{v}$ paraméteres vektoregyenlete koordinátás alakba írva az

$$(7) \quad (x, y, z) = (0, -d, 0) + t \cdot (\cos \delta \cdot \cos \alpha, \cos \delta \cdot \sin \alpha + d, \sin \delta) \quad t \in \mathbb{R}$$

alakot ölti, ahol $\mathbf{r}(x, y, z)$ az egyenes egy tetszőleges pontjának helyvektora. Átrendezve a (7) összefüggést, majd koordinátánkénti felírásával nyerjük a

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= t \cdot \cos \delta \cdot \cos \alpha \\ y + d &= t \cdot (\cos \delta \cdot \sin \alpha + d) \quad (d \geq 1) \\ z &= t \cdot \sin \delta \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahonnan

$$(9) \quad \frac{x}{\cos \delta \cdot \cos \alpha} = \frac{y+d}{\cos \delta \cdot \sin \alpha + d} = \frac{z}{\sin \delta} (= t)$$

következik. Most a (9) első és második, illetve a második és harmadik tört egyenlőségéből

$$(10) \quad \frac{x}{\cos \delta \cdot \cos \alpha} = \frac{y+d}{\cos \delta \cdot \sin \alpha + d}, \quad \frac{z}{\sin \delta} = \frac{y+d}{\cos \delta \cdot \sin \alpha + d} \quad (d \geq 1)$$

következik. A CP vetítősugár és az $y = 0$ egyenletű képsík $P'(x', z')$ metszéspontjának meghatározásához helyettesítsük az $y = 0$ értéket a (10) egyenletekbe, amelyből egyszerű átalakítással

$$(11) \quad \frac{x'}{\cos \delta \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{\cos \delta \cdot \sin \alpha}{d} + 1}, \quad \frac{z'}{\sin \delta} = \frac{1}{\frac{\cos \delta \cdot \sin \alpha}{d} + 1}$$

következik. A (11) egyszerű átrendezésével nyerjük az

$$(12) \quad x' = \frac{\cos \delta \cdot \cos \alpha}{\frac{\cos \delta \cdot \sin \alpha}{d} + 1}, \quad z' = \frac{\sin \delta}{\frac{\cos \delta \cdot \sin \alpha}{d} + 1} \quad (d \geq 1)$$

összefüggéseket, amelyeket az univerzális asztrolábium leképezési egyenleteinek nevezünk.

Teljesen analóg módon képezhetjük le az xz síkra a $C'(0, d, 0)$ pontból történő centrális projekcióval az éggömb fenti eljárásban szereplő félgömbjének kiegészítő félgömbjét. Így az előzővel együtt a teljes éggömről egy dupla rétegű képet nyerünk. A (12) leképezési egyenletek ismeretében most már meghatározhatjuk az éggömb alapvető pontjainak és fontos köreinek a fentiekben ismertetett kettős projekcióval származtatott vetületét.

A $d = 1$ határesetben az éggömb két rétegű sztereografikus vetületét nyerjük a $C(0, -1, 0)$, illetve a $C'(0, 1, 0)$ pontról vetítve, ekkor a leképezési egyenletek alakja

$$(13) \quad x' = \frac{\cos \delta \cdot \cos \alpha}{\cos \delta \cdot \sin \alpha + 1}, \quad z' = \frac{\sin \delta}{\cos \delta \cdot \sin \alpha + 1}.$$

Ez az éggömb al-Zarqali – Gemma Frisius-féle sztereografikus vetületi rendszerbeli képe, amely a Sapha Arzachelis univerzális asztrolábium matematikai alapját képezi.

A $d \rightarrow \infty$, $d \geq 1$ határesetben az éggömb két rétegű ortografikus vetületét kapjuk, most a leképezési egyenletek alakja

$$(14) \quad x' = \cos \delta \cdot \cos \alpha, \quad z' = \sin \delta.$$

Ez pedig az éggömb Juan de Rojas-féle vetületi rendszerbeli képe, amely az ortografikus univerzális asztrolábium (és a Lóskay-féle korong) matematikai alapját alkotja.

Mindkét fentiekben említett speciális esetben vizsgáljuk meg az égi egyenlítő gömbi főkörének vetületét. Láthatjuk, hogy ennek a fokokban mért skálázása lényeges eltéréseket mutat. Az első, sztereografikus projekción alapuló esetben a skála a vetületi korong pereme felé haladva megritkul (3. ábra), míg a második, ortografikus projekción nyugvó esetben a skála a vetületi korong pereme felé haladva besűrűsödik (4. és 7. ábra). Megjegyezzük, hogy az égi egyenlítő vetületére merőleges skála ugyanezeket a jegyeket viseli, amint ez az említett ábrákon is jól látható.

Az égi egyenlítő vetületéről történő szögleolvasás akkor volna pontosabb és könnyebb, ha ez a skála lineáris, vagy jó közelítéssel lineáris lenne. Ennek a linearizálási problémának a megoldását adta meg Philippe de la Hire a XVIII. század elején (PÉNTEK 2014).

E feladat megoldásához tekintsük tetszőleges $d \geq 1$ esetén az éggömb égi egyenlítőjének egyik negyedkörét, amelyet olyan $P(\alpha, \delta)$ pontok alkotnak, amelyre $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $\delta = 0^\circ$ teljesül. Ezen negyedkör (12) leképezés melletti képe

$$(15) \quad x' = \frac{\cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{d} + 1}, \quad z' = 0,$$

ahol nyilván teljesül még a $0 \leq x' \leq 1$ egyenlőtlenség is. Vizsgáljuk meg, hogy milyen d érték esetén képződik le a vizsgált negyed körív $\alpha = 45^\circ, \delta = 0^\circ$ koordinátákkal jellemzett középpontja a képszakasz felezőpontjára, vagyis mekkora d mellett áll fenn a

$$(16) \quad \frac{\cos 45^\circ}{\frac{\sin 45^\circ}{d} + 1} = \frac{1}{2}$$

összefüggés! A (16) egyenlet megoldásaként könnyen adódik a

$$(17) \quad d = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1,7071$$

érték.

A fentihez teljesen hasonló gondolatmenettel tetszőleges $d \geq 1$ esetén az éggömb napforduló kolúrnak negyedkörét azon $P(\alpha, \delta)$ pontok alkotják, amelyekre $\alpha = 90^\circ$, $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ teljesül. E negyedkör (12) leképezés melletti képe

$$(18) \quad x' = 0, \quad z' = \frac{\sin \delta}{\frac{\cos \delta}{d} + 1},$$

amelyre fennáll még a $0 \leq z' \leq 1$ egyenlőtlenség is. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora d érték esetén képződik le a most vizsgált negyedkör $\alpha = 90^\circ, \delta = 45^\circ$ koordinátákkal jellemzett pontja a képszakasz felezőpontjára, vagyis milyen d esetén áll fenn a

$$(19) \quad \frac{\sin 45^\circ}{\frac{\cos 45^\circ}{d} + 1} = \frac{1}{2}$$

összefüggés! Egyenletünk megoldásaként a (16) összefüggéssel analóg módon könnyen adódik a (17) értékkel megegyező

$$(20) \quad d = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1,701$$

érték.

Számítsuk ki most e közös z' és x' értékeket 10° -os sűrűséggel, amelynek eredményeként nyerjük az alábbi *1. táblázatot*:

1. táblázat: $z'(\delta) = x'(\alpha)$ értékei
Table 1. The values of $z'(\delta) = x'(\alpha)$

$\alpha [^\circ]$	$\delta [^\circ]$	$z'(\delta) = x'(\alpha)$
0°	90°	1
10°	80°	0,8939
20°	70°	0,7829
30°	60°	0,6698
40°	50°	0,5565
50°	40°	0,4437
60°	30°	0,3317
70°	20°	0,2206
80°	10°	0,1101
90°	0°	0

Megvizsgálva a táblázat értékeit könnyen megállapíthatjuk, hogy gyakorlatilag 2 tizedesjegy pontossággal a skála mindkét „tengely” mentén a képsíkon igen jó közelítéssel lineáris. Tanulmányozva továbbá a képsíkban az égi egyenlítő „rektaszenciós tengelyét”, valamint a napfordulati kolúr „deklinációs tengelyét”, az alábbi szimmetriákat vehetjük észre:

$$(22) \quad x'(180^\circ - \alpha) = -x'(\alpha), \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

és

$$z'(-\delta) = -z'(\delta), \quad 0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$$

A $d = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ értékhez tartozó különleges, kvázilineáris skálázást eredményező perspektív projekciót, s a rajta alapuló asztrolábiumot alkotta meg 1701-ben Philippe de la Hire francia matematikus és csillagász (*SNYDER-VOXLAND* 1989).

Az univerzális asztrolábiumok fentiekben ismertetett három típusának részletes ismertetése *HOLLANDER* (1999), valamint *MORRISON* (2010) művében megtalálható.

4. A Philippe de la Hire vetületén alapuló csillagászati korong

La Hire előző részben ismertetett vetületén alapuló csillagászati készülék egy olyan két rétegből álló, lapos korong alakú taneszköz, amelynek rétegei a két körlemez középpontján átmenő, a korongok síkjára merőleges tengely körül elforgatható módon vannak összekapcsolva.

A felső réteg merev fóliából készült, átlátszó, rajta megtalálható a Philippe de la Hire-féle meridionális vetületben *PÉNTEK* (2012) dolgozatával összhangban az éggömb $2,5^\circ$ -os sűrűségű hálózatának képe arról az égi egyenlítői zónáról, amely mentén a Nap évi látszólagos mozgását végzi. Mivel a Föld tengelyferdesége jó közelítéssel $23^\circ 30'$, ezért ezen égi egyenlítői zóna $[-23^\circ 30', 23^\circ 30']$ deklinációjú sávot öleli fel. Ezen a sávon belül megjelöltük azokat a Nappályákat, amelyek mentén a tavaszi napéjgyenlőségtől indulva a Nap jó közelítéssel 10-10 nap elteltével végighalad. Ezek értékeit és a hozzátartozó dátumokat a 2. táblázat tartalmazza.

A korong alsó rétege kartonból készült, körkörösén a peremén tartalmazza a szögskálákat a meridián mentén, a horizont mentén, a szürke három sötétedő árnyalatával feltüntettük a szürkületi sávokat, rögzítettük a fő égtájak helyét, valamint a zenit és nadír pontokat. Az égbolt horizont fölötti, látható éggömbjének megfelel a korong felső félkörlemeze. A teljes körlemezen elhelyeztük horizontális koordináta-hálózatot szintén $2,5^\circ$ -os sűrűséggel La Hire-féle vetületben (*10. ábra*).

2. táblázat: A Nap adatai az év folyamán
Table 2. Data of the Sun during a year

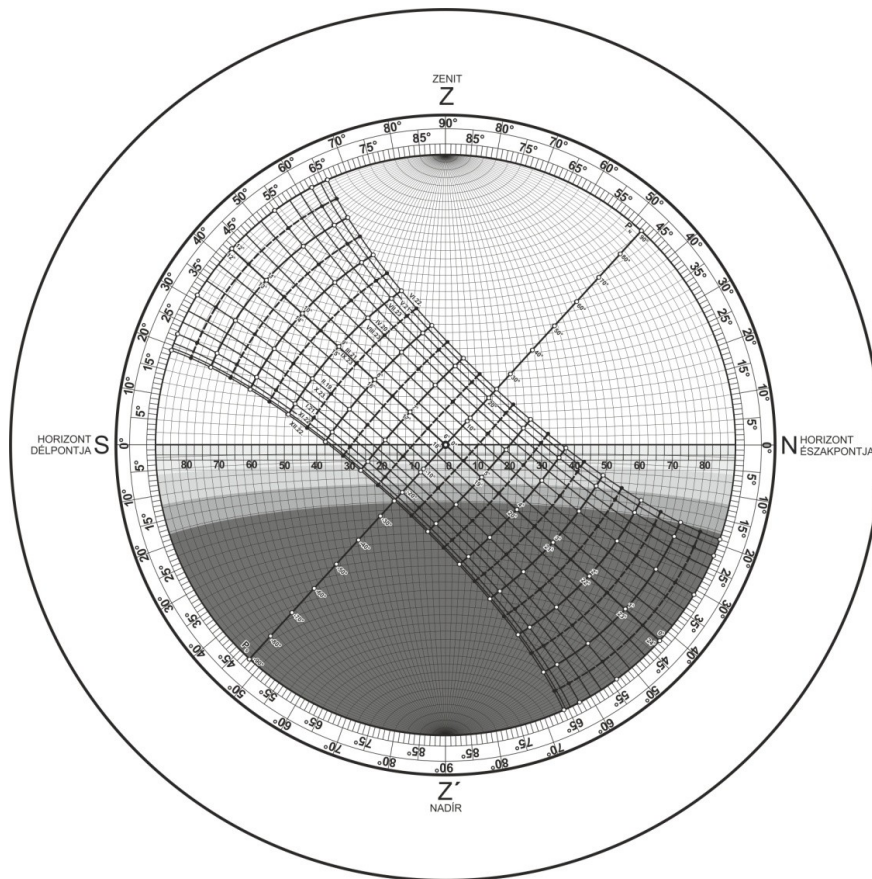
Sorszám	Dátum	Deklináció	Sorszám	Dátum	Deklináció
1	március 21.	0°	19	szeptember 23.	0°
2	március 31.	4°	20	október 3.	-4°
3	április 10.	8°	21	október 13.	-8°
4	április 20.	11,5°	22	október 23.	-11,5°
5	április 30.	15°	23	november 2.	-15°
6	május 10.	17,5°	24	november 12.	-17,5°
7	május 21.	20°	25	november 22.	-20°
8	május 31.	22°	26	december 2.	-22°
9	június 11.	23°	27	december 12.	-23°
10	június 22.	23,5°	28	december 22.	-23,5°
11	július 2.	23°	29	január 1.	-23°
12	július 12.	22°	30	január 11.	-22°
13	július 23.	20°	31	január 21.	-20°
14	augusztus 3.	17,5°	32	január 31.	-17,5°
15	augusztus 13.	15°	33	február 9.	-15°
16	augusztus 23.	11,5°	34	február 19.	-11,5°
17	szeptember 3.	8°	35	március 1.	-8°
18	szeptember 13.	4°	36	március 11.	-4°

Az eszköz lényegében analóg módon épül fel azzal az ortografikus vetületi rendszerrel (*PÉNTEK* 2010) alapuló koronggal, amelyet *PÉNTEK* (2012) tanulmánya részletesen ismertet. Az ott részletezett módon megoldhatók a La Hire-vetületen alapuló eszközzel is az alapvető szférikus csillagászati alapfeladatok. Így könnyedén beállíthatjuk eszközünket a felhasználó helye földrajzi szélességének megfelelően, mint univerzális asztrolábiumot. E beállítás után az év bármely napján megállapíthatjuk a Nap delelési magasságát és éjféle mélységét, a Nap kelési és nyugvási időpontját valódi napidőben, meghatározhatjuk a napkelte és napnyugta irányát, a nappal és az éjszaka időtartamát, továbbá a polgári, a navigációs és a csillagászati szürkület időtartamát is.

Ha a La Hire-féle vetületen alapuló korong hátoldalán kialakítunk egy egyszerű tengerészeti asztrolábiumot, akkor annak segítségével a korongot alkalmasan felfüggesztve meghatározhatjuk bármely időpontban a Nap horizont fölötti magasságát.

Ismerve a dátumot, megkereshetjük a hozzátartozó Nappályát a vizsgált földrajzi hely szélességének megfelelően beállított átlátszó koronon. Keressük meg továbbá a korong alsó rétegén a lemért napmagasság ellipszis ívét. Határozzuk meg ezután e két görbe metszéspontját, s az égi egyenlítőn levő skálabeosztást a szóban forgó Nappályára megfelelően vetítve a

metszéspontban megkapott skálaérték megadja az adott időpillanathoz tartozó valódi napidőt (Bartha Lajos tudománytörténész szóbeli közlése). Az adott hely földrajzi hosszúságát felhasználva, továbbá az adott dátumhoz tartozó analemmáról leolvasott időkorrekció figyelembe vételével a valódi napidőből azonnal nyerhetjük (a téli-nyári időszámítás figyelembevételével a kisebb korrekciókat elhanyagolva) a közép-európai zónaidőt, mint a hétköznapi életben használt polgári időt.



10. ábra: A Philippe de la Hire-féle vetület alapján készített forgatható korong
 Figure 10. The rotatable daily arc plate of Ph. de la Hire

A La Hire vetületen alapuló korong ezen napóra tüzemódjára egy illusztráló feladatot mutatunk be. Szeptember 13-án Szombathelyen a délutáni órákban $h = 42,5^\circ$ Napmagasságot mérünk. Határozzuk meg a valódi napidőt, s ennek felhasználásával a közép-európai zónaidő értékét!

Szeptember 13-án a Nap deklinációja a 2. táblázat, illetve az átlátszó korongon levő egyenlítői zóna deklinációs hálózatának felhasználásával $\delta_{\odot} = +4^{\circ}$. Az analemma görbe felhasználásával az időegyenlítés értéke ekkor $E = +4^m$. Ha Szombathelyen vagyunk, akkor a város földrajzi helyzete miatt $T_{\lambda} = +6,5^m$, hiszen időben kifejezve ennyire vagyunk keletre a közép-európai időzóna középvonalától.

Ezen ismeretek és adatok birtokában a korongról leolvasott valódi rapidó értéke $T_{\odot} = 13^h 30^m$, a közép-európai zónaidő T értéke pedig a

$$(23) \quad T = T_{\odot} - E - T_{\lambda} \pm 1^h$$

összefüggésbe helyettesítve az értékeket megkapjuk a

$$(24) \quad T = 13^h 30^m - 4^m - 6^m 30^s + 1^h = 14^h 19^m 30^s .$$

Megjegyezzük, hogy lineáris interpolációt alkalmazva néhány perc pontossággal meghatározhatjuk a szóban forgó dátumhoz időben szomszédos kihúzott nappályák ismeretében a valódi rapidó, vagy a közép-európai zónaidő értékét akkor is, ha a Nap aktuális deklinációjának megfelelő pályáiv nem szerepel a korongon kiszerkesztve.

A bemutatott példában felhasznált szférikus csillagászati fogalmak és összefüggések *KÖVESLIGETHY* (1899), *MARIK* (1989) és *SZENKOVITS* (2007) munkájában megtalálhatóak.

Köszönetnyilvánítás:

*Hálás köszönet illeti meg **Bartha Lajos** tudománytörténészt a kézirat gondos átnézéséért és értékes tanácsaiért, megjegyzéseierért.*

*Őszinte köszönet **Dr. Garai Zoltán** csillagász tudományos aspiránsnak, a Szlovák Tudományos Akadémia Csillagászati Intézete munkatársának a dolgozat lektorálásáért és értékes kiegészítéseierért.*

*A szerző köszönetét fejezi ki **Varga Enikő** matematika-német szakos tanárnőnek az ábrák gondos megszerkesztéséért, továbbá **Mitre Zoltánnak**, a Gothard Amatőr csillagászati Egyesület titkárának a Philippe de la Hire-féle korong számítógépes megkonstruálásáért.*

IRODALOM

- HOLLANDER, R.* (1999): *L’Astrolabe – Histoire, Théorie et Pratique*. Institut Océanographique, Paris. 391 p.
- KÖVESLIGETHY R.* (1899): *A matematikai és csillagászati földrajz kézikönyve*. Kogutovicz és tsa Magyar Földrajzi Intézete, Budapest. 911 p.
- KÖVESLIGETHY R.* (1903): *Használati utasítás Lóskay Miklósnak a Nap és a csillagok járását a Föld tetszőleges helyén feltüntető napi-ív-korongjához*. Magyar Földrajzi Intézet Rt., Budapest. 15 p.
- LÓSKAY M.* (1904): *A Nap és a csillagok járása a Föld tetszőleges helyén*. Magyar Földrajzi Intézet Rt., Budapest. 2 p.
- MARIK M.* (1989): *Csillagászat*. Akadémiai Kiadó, Budapest. 867 p.
- MORRISON, J. E.* (2010): *The Astrolabe*, Ed. Janus, Rehoboth Beach, DE, USA. 437 p.
- PÉNTEK K.* (2010): *Ábrázoló geometriai módszerek alkalmazása a szférikus csillagászatban: az ortografikus meridián projekció*. NymE SEK Tudományos Közleményei XVII. Természettudományok 12. Szombathely. 27–49 p.
- PÉNTEK K.* (2012): *Az ortografikus meridionális vetületi rendszeren alapuló csillagászati készülék: a Nap évi mozgását bemutató forgatható korong*. NymE SEK Tudományos Közleményei XVIII. Természettudományok 13. 37–64. p.
- PÉNTEK K.* (2014): *Egy érdekes térképi vetület matematikai és csillagászati alkalmazásai*. In: *Dimenziók: Matematikai közlemények II*. NymE Erdőmérnöki Kar, Matematikai Intézet, STT. Sopron, 3–8.
- SNYDER, J. P. – VOXLAND, Ph. M.* (1989): *An Album of Map Projections*, U. S. Geological Survey Professional Paper 1453. Denver. 249. p.
- SZENKOVITS F.* (2007): *Bevezetés a csillagászatba*. Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Kolozsvár. 226 p.