

## Gazdasági változások regressziós vizsgálata

**Csanády Viktória**  
SOE Matematikai Intézet  
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A gazdasági folyamatok elemzése során számtalan esetben támaszkodnak adatsorokra, termelési vagy fogyasztási értékek időbeni alakulása alapján. A folyamatok vizsgálatára a trendszámítást alkalmazzák, már közismert modellek felhasználása révén. Az alábbiakban egy speciális modell illesztésére kerül sor, illetve annak kielemezésére.

**ABSTRACT.** Examining economic processes, the analysis is often based on time series data, considering the timely evolution of production- or consumption values. Trend estimation is applied for examining the tendencies using well-known models. In the following we are going to fit a special model to data and analyse it.

### 1. Bevezetés

A gazdasági folyamatok vizsgálata során számtalan esetben alkalmaznak trendszámítást, ami az illesztett modell alapján többé-kevésbé követi a folyamatot és előre jelzést is szolgál. Az esetek többségében az alkalmazott modellek közismertek, gyakran használt függvények. Több különböző gazdasági adat összevetése viszont nehézkes velük akkor, ha a dimenziók nagyságrendje különböző. Így esett a választás egy új modell alkalmazására. A vizsgálat az 1960 és 2015 évek között eltelt 56 év gazdasági változásának elemzéséhez 12 adatsort használ, melyek kiválasztása véletlenszerűen történt a Központi Statisztikai Hivatal adatbázisából. A vizsgált adatsorok az alábbiak:

- 1.) Egy főre jutó évi burgonya kg mennyiség változása.
- 2.) Családi pótlékkal rendelkezők éves létszámának változása.
- 3.) Gyakorlatilag aktív népesség ezer fős éves létszámának változása.
- 4.) Földgáz millió köbméteres értékű éves igénybevételének változása.
- 5.) Tízezer főre jutó kórházi ágyak éves számának változása.
- 6.) Nyugdíjas létszám éves változása.
- 7.) Óvodások ezer fős éves létszámának változása.
- 8.) Pamutszövet millió négyzetméteres éves felhasználási mennyiségének változása.
- 9.) Millió liter egységben rendelkezésre álló sör éves mennyiségének változása.
- 10.) Millió számú vezetékes telefon hívások éves számának változása.
- 11.) Egy főre jutó évi tojás darabszám éves változása.
- 12.) Helyi évi személyszállítási utasszám indexének éves változása.

Az adatsorokra történt görbeillesztéshez egy olyan modell használata bizonyult megfelelőnek, amely a rugalmasság és az egyszerű kezdőérték megválasztás miatt könnyen

kezelhető. A függvény összetett szerkezetű, zárt értelmezési tartományú. Ezen kritériumok miatt a választott modell két eltolt helyzetű Awrami függvény szuperponáltja.

A vizsgált adathalmaz és az alkalmazott modell a következő:

Az alábbiakban bemutatásra kerül a vizsgált adatsor egy részlete. A táblázat első oszlopában az évek, első sorában a sorszámozott vizsgálati adatsorok kerültek feltüntetésre az előzőekben történt felsorolás szerint.

Év	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1960	97,6	577	4735	342	72,3	636	184	247	356	538	160	100
1961	95,0	593	4626	327	73,0	796	172	264	378	558	161	104
1962	94,1	609	4544	340	74,8	912	178	281	383	572	159	107
1963	91,7	614	4569	611	75,7	983	184	292	408	596	163	108
1964	87,8	612	4653	784	76,6	1046	187	314	423	606	180	113

...

2010	60,5	1224	4177	1849	71,3	2980	338	3	616	1678	235	108
2011	63,5	1191	4192	1734	71,5	2921	341	2	645	1599	217	108
2012	62,3	1168	4245	5564	69,5	2919	340	2	639	1426	215	106
2013	58,6	1150	4296	5404	70,0	2869	-	12	600	1344	214	106
2014	53,0	1114	4385	5134	69,8	2801	-	8	595	1188	-	111
2015	-	1108	4464	4689	69,8	2727	-	11	582	1061	-	113
2016	-	-	4538	4340	-	-	-	-	-	-	-	-

1. táblázat. Adathalmaz

### Az alkalmazott regressziós modell

- hagyományos matematikai alakja:

$$y = b_8 - b_7 \cdot e^{(-1 \cdot (b_6 \cdot (x - b_5))^{b_4})} - b_3 \cdot e^{(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (x - b_1))^{b_0})}$$

- a számítógépes alak:

$$\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^{b_4}) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^{b_0}).$$

A feltüntetett függvény minden olyan adatsor regressziós vizsgálatára alkalmazható, mely adatsor var2 értéke az értelmezési tartományon belül maximum vagy minimum értékkel rendelkezik. Az értelmezési tartomány pedig eleget tesz  $b_5 < \text{var1} < b_1$  feltételnek.

Kezdőértékek meghatározása az adatsor értékei alapján a következő módon történik:

$b_8$  = a maximális vagy minimális var2 érték,

$b_7$  = a maximális vagy minimális var2 érték mínusz a kezdő var2 érték,

$b_6$  = a var1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében 0,1 (0,05),

$b_5$  = a var1 kezdőértéke, vagy annál relatív kisebb,

$b_4$  = az esetek többségében 3 (5),

$b_3$  = a maximális vagy minimális var2 érték mínusz a végső var2 érték,

$b_2$  = a var1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében 0,1 (0,05),

$b_1$  = a var1 végsőértéke, vagy annál relatív nagyobb,

$b_0$  = az esetek többségében 3 (5).

### A modell levezetése

A kérdéses függvény egy normál helyzetű transzformált és egy y-tengelyre tükrözött megfelelően transzformált Awrami függvény összegéből került kialakításra, zárt értelmezési tartomány feltételével.

A kiindulási matematikai alak:

$$y = a \cdot \left( 1 - \frac{1}{e^{((b \cdot (x-c))^d)}} \right) + f \cdot \left( 1 - \frac{1}{e^{((-g \cdot (x-h))^i)}} \right) + k,$$

ahol az értelmezési tartomány  $c < x < h$  (természetesen  $d$  és  $i$  nem páros egész).

Átalakítási lépések:

$$1. \quad y = a - \frac{a}{e^{((b \cdot (x-c))^d)}} + f - \frac{f}{e^{((-g \cdot (x-h))^i)}} + k$$

$$2. \quad y = a + f + k - \frac{a}{e^{((b \cdot (x-c))^d)}} - \frac{f}{e^{((-g \cdot (x-h))^i)}}$$

$$3. \quad a + f + k = r$$

$$4. \quad y = r - \frac{a}{e^{((b \cdot (x-c))^d)}} - \frac{f}{e^{((-g \cdot (x-h))^i)}}$$

$$5. \quad r = b_8, \quad a = b_7, \quad b = b_6, \quad c = b_5, \quad d = b_4, \quad f = b_3, \quad g = b_2, \quad h = b_1, \quad i = b_0$$

$$6. \quad y = b_8 - \frac{b_7}{e^{((b_6 \cdot (x-b_5))^{b_4})}} - \frac{b_3}{e^{((-b_2 \cdot (x-b_1))^{b_0})}}$$

$$7. \quad y = b_8 - b_7 \cdot e^{(-1 \cdot (b_6 \cdot (x-b_5))^{b_4})} - b_3 \cdot e^{(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (x-b_1))^{b_0})}.$$

### A fenti modellből pedig a számítógépi alak

$$\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^{b_4}) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^{b_0}).$$

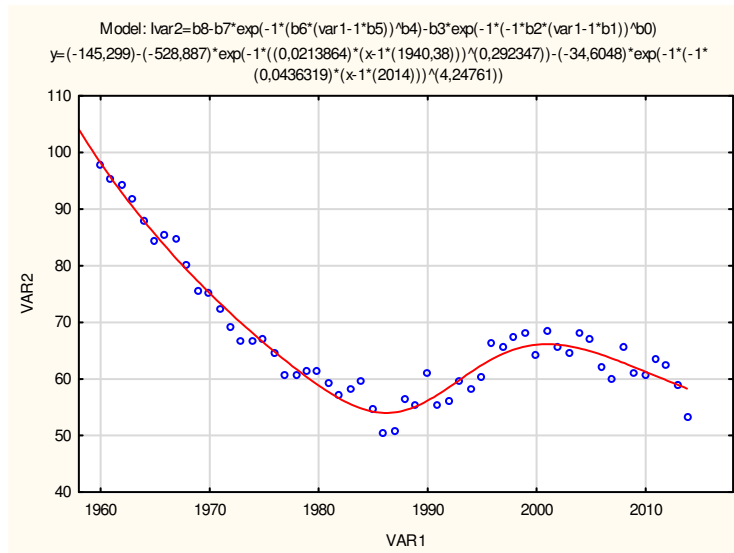
Az alkalmazott regressziós függvénnyel kapcsolatban fontos további megjegyzések a következők:

- Ha a vizsgált adatsor  $\text{var1}$ (kezdő) és  $\text{var1}$ (végső) értékétől az illesztés során kapott  $b_5$  és  $b_1$  érték jelentős mértékben nem tér el, akkor nemcsak a görbéről kaphatunk pontos adatokat, hanem a paraméterek is közvetlen értelmezhetők a következők szerint:  $b_8 = \text{var2}(\text{max})$ ,
- $b_8 - b_7 = \text{var2}(\text{kezdő})$ ,  $b_8 - b_3 = \text{var2}(\text{végső})$  érték. A függvény illesztésének feltétele, hogy az adott adatsor legfeljebb egy maximum vagy minimum hellyel, és legfeljebb két inflexiós hellyel rendelkezzen.

## 2. Számított eredmények, kiértékelés

### 2.1. A regressziós eljárással nyert eredmények

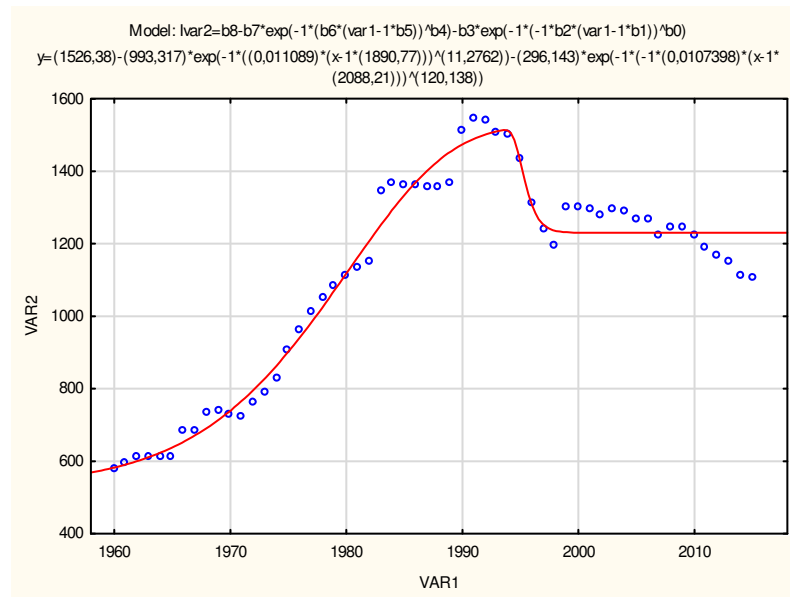
Az illesztés során kapott eredményeket, az alábbiak mutatják az adatsorok számozási sorrendjében.



1. ábra. 1Burgonya

	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^{b_4}) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^{b_0})$ Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 278,14125136 R= ,98035 Variance explained: 96,109%									
N=55	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0	
Estimate	-145,29	-528,88	0,02138	1940,37	0,29234	-34,604	0,04363	2014,00	4,24761	

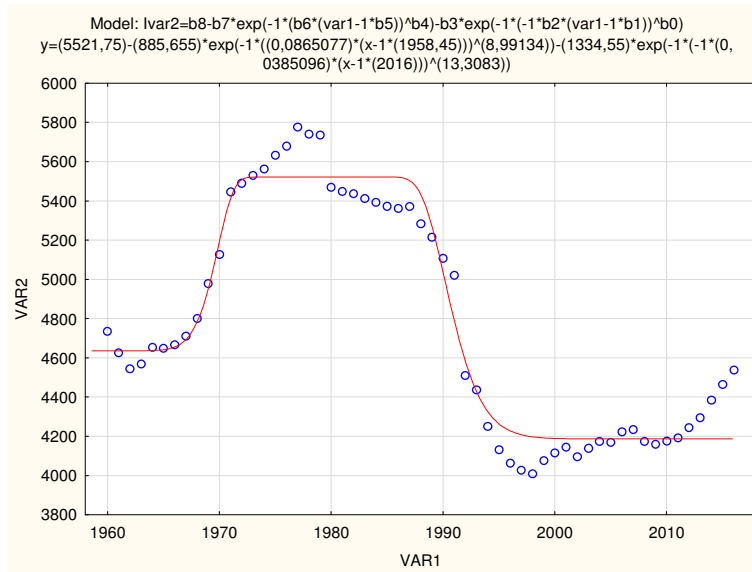
2. táblázat. 1Burgonya



2. ábra. 2Csalpót

	Model: $\text{var2} = b_8 - b_7 \cdot \exp(-1 \cdot (b_6 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_5))^{b_4}) - b_3 \cdot \exp(-1 \cdot (-1 \cdot b_2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b_1))^{b_0})$ Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 121202,17513 R= ,98683 Variance explained: 97,384%									
N=56	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0	
Estimate	1526,38	993,316	0,01108	1890,77	11,2761	296,143	0,01074	2088,20	120,137	

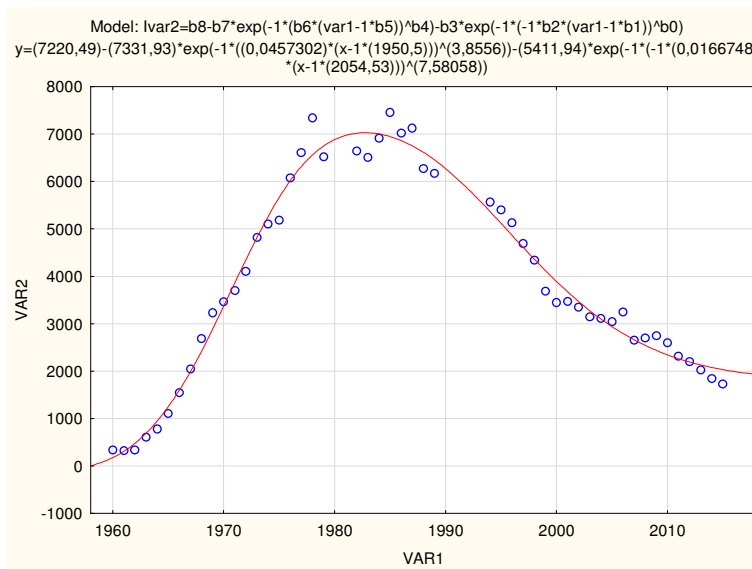
3. táblázat. 2Csalpót



3. ábra. 3Dolgozó

	Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-1*b2*(var1-1*b1))^b0)$ Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 835862,07765 R= ,97779 Variance explained: 95,608%								
N=57	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	5521,7	885,65	0,0865	1958,4	8,9913	1334,5	0,0385	2016,0	13,308

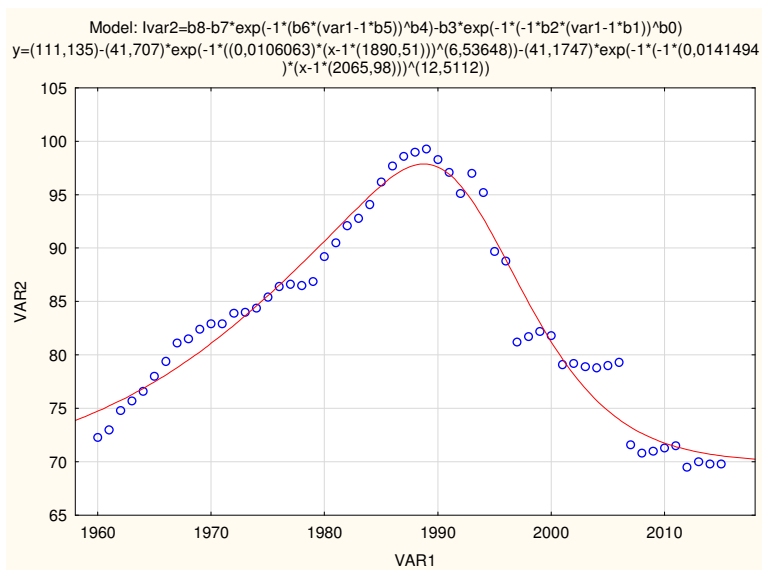
4. táblázat. 3Dolgozó



4. ábra. 4Földgáz

	Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-1*b2*(var1-1*b1))^b0)$ Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 3659883,1679 R= ,99139 Variance explained: 98,285%								
N=50	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	7220,4	7331,9	0,0457	1950,5	3,8556	5411,9	0,0166	2054,5	7,5805

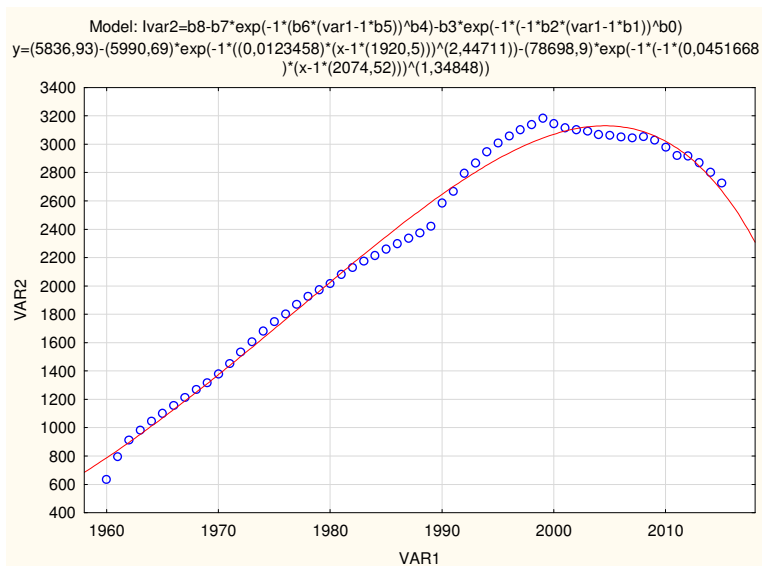
5. táblázat. 4Földgáz



5. ábra. 5Kórágnyak

	Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-1*(b2*(var1-1*b1))^b0)$ (5Kórágnyak)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 189,96074534 R= ,97876 Variance explained: 95,796%								
N=56	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	111,135	41,707	0,0106063	1890,51	6,53648	41,1747	0,0141494	2065,98	12,5112

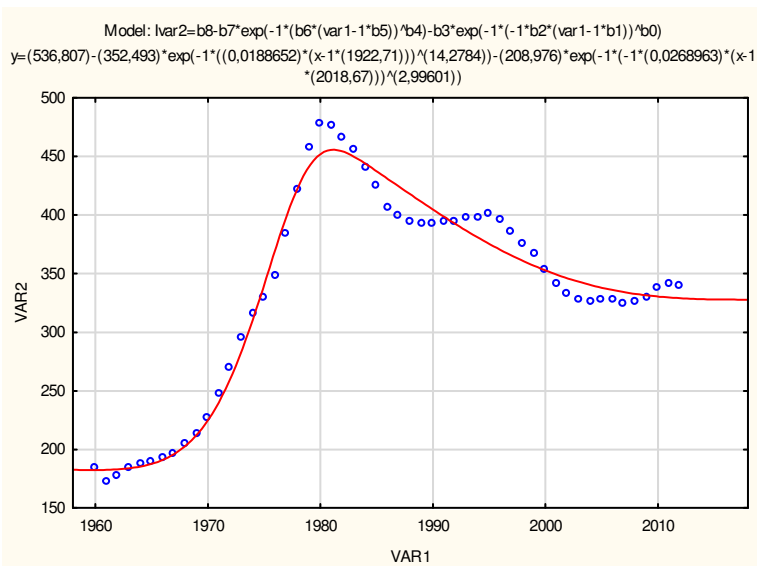
6. táblázat. 5Kórágnyak



6. ábra. 6Nyugdijas

	Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-1*(b2*(var1-1*b1))^b0)$ (6Nyugdijas)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 277651,61936 R= ,99576 Variance explained: 99,154%								
N=56	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	5836,9	5990,6	0,0123	1920,5	2,4471	78698,9	0,0451	2074,5	1,3484

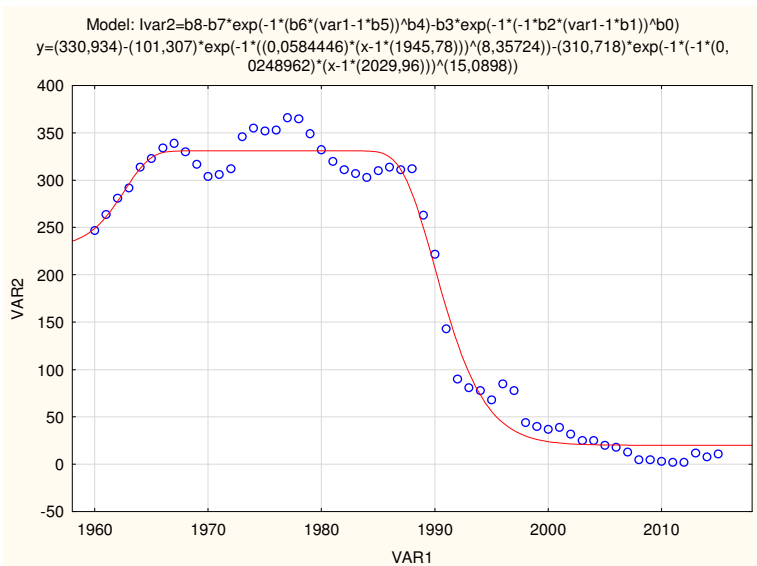
7. táblázat. 6Nyugdijas



7. ábra. 7Ovodások

Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-... (7Ovodások)$									
Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2									
Final loss: 8971,9132412 R= ,98879 Variance explained: 97,770%									
N=53	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	536,80	352,49	0,0188	1922,7	14,278	208,97	0,0268	2018,6	2,9960

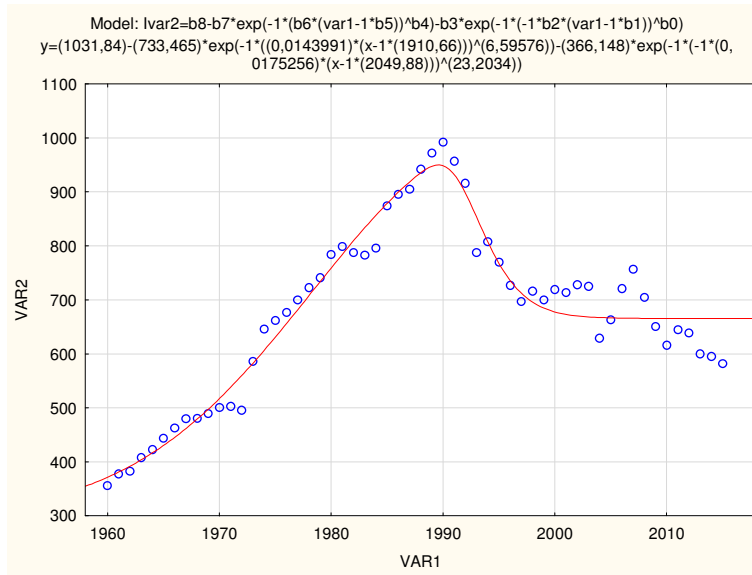
8. táblázat. 7Ovodások



8. ábra. 8Pamutz

Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-... (8Pamutz)$									
Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2									
Final loss: 18535,762035 R= ,99170 Variance explained: 98,346%									
N=56	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	330,93	101,30	0,0584	1945,7	8,3572	310,71	0,0248	2029,9	15,089

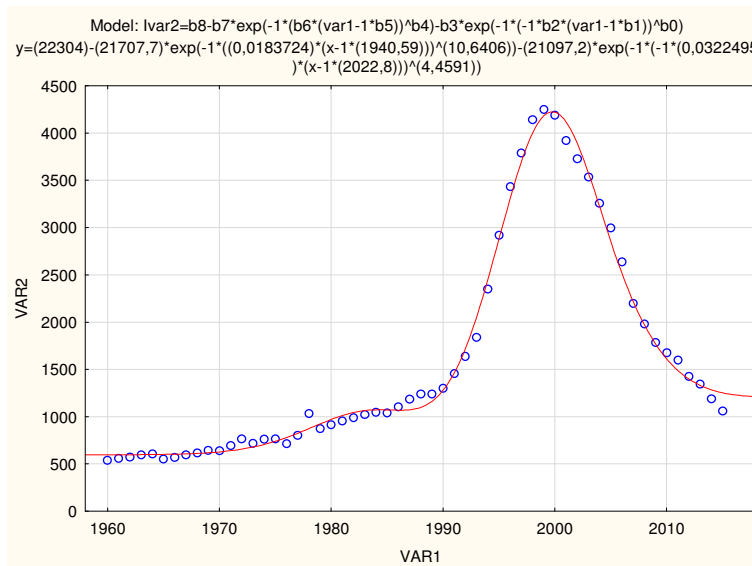
9. táblázat. 8Pamutz



9. ábra. 9Sör

	Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-... (9Sör)$								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 71275,861069 R= ,97466 Variance explained: 94,996%								
N=56	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	1031,8	733,46	0,0143	1910,6	6,5957	366,14	0,0175	2049,8	23,203

10. táblázat. 9Sör

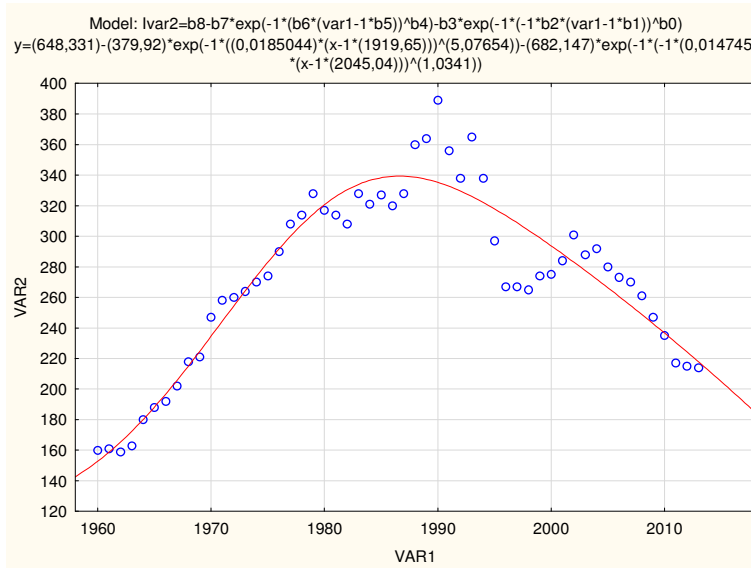


10. ábra. 10Telhívás

	Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-... (10Telhívás)$								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2								
	Final loss: 400101,55114 R= ,99720 Variance explained: 99,440%								
N=56	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	22304,	21707,	0,0183	1940,5	10,640	21097,	0,0322	2022,8	4,4591

11. táblázat. 10Telhívás

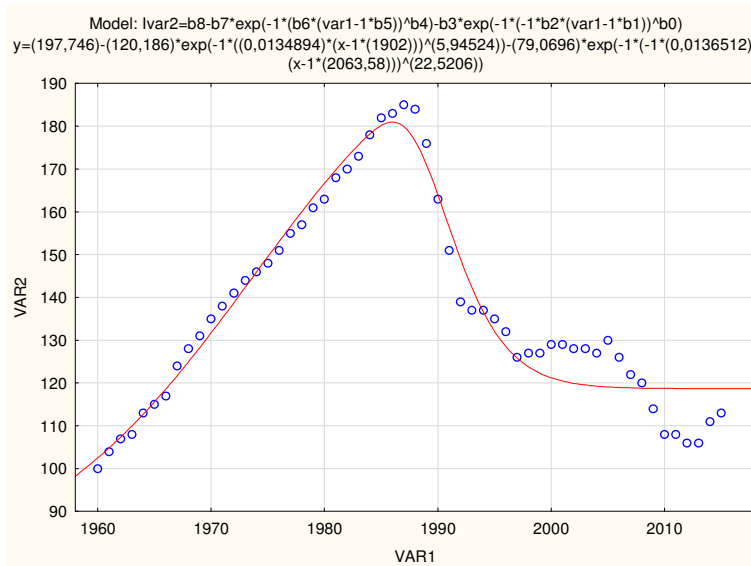




11. ábra. 11Tojásdb

	Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-1*b2*(var1-1*b1))^b0)$ Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 17719,136144 R= ,94861 Variance explained: 89,985%								
N=54	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	648,33	379,92	0,0185	1919,6	5,0765	682,14	0,0147	2045,0	1,0341

12. táblázat. 11Tojásdb



12. ábra. 12Utasszám

	Model: $var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-1*b2*(var1-1*b1))^b0)$ Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 1620,1700191 R= ,97375 Variance explained: 94,820%								
N=56	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	197,746	120,186	0,0134894	1902	5,94524	79,0696	0,0136512	2063,58	22,5206

13. táblázat. 12Utasszám

## 2.2. Elemzés, értékelés

Az 56 év alatti változás modellértékeinek összefoglalása.

A felsorolt megnevezett adatsorokra a megadott függvény regressziós alkalmazásával nyert paramétereiből kapott értékek az alábbiakban olvashatók az értékelő táblázatban:

Adatsor	Pontosság R értékei	Ért. tart. $b_5 < \text{var}1 < b_1$	Érték var2 előjel	Jelző kitevő	Jelző szorzó	Előre jelzési mód
1. Burgonya	0,9804	1940 - 2014	+	$b_0 > 2$	$**b_7 < 0$	kizárt
2. Csalpot	0,9868	1890 - 2088	+	$b_0 > 2$	$b_7 > 0$	lehetséges
3. Dolgozó	0,9778	1958 - 2016	+	$b_0 > 2$	$b_7 > 0$	lehetséges
4. Földgáz	0,9914	1950 - 2054	*-+	$b_0 > 2$	$b_7 > 0$	lehetséges
5. Kórágyak	0,9788	1890 - 2065	+	$b_0 > 2$	$b_7 > 0$	lehetséges
6. Nyugdíjas	0,9958	1920 - 2074	+ -	$**b_0 < 2$	$b_7 > 0$	kizárt
7. Ovodások	0,9888	1922 - 2018	+	$b_0 > 2$	$b_7 > 0$	lehetséges
8. Pamutsz	0,9917	1945 - 2029	+	$b_0 > 2$	$b_7 > 0$	lehetséges
9. Sör	0,9747	1910 - 2049	+	$b_0 > 2$	$b_7 > 0$	lehetséges
10. Telhívás	0,9972	1940 - 2022	+	$b_0 > 2$	$b_7 > 0$	lehetséges
11. Tojásdb	0,9486	1919 - 2045	+ -	$**b_0 < 2$	$b_7 > 0$	kizárt
12. Utasszám	0,9738	1901 - 2063	+	$b_0 > 2$	$b_7 > 0$	lehetséges

14. táblázat. Értékelő

A táblázatban csillaggal jelölt információk az alábbiak szerint értékelendők:

\* az előrejelzés lehetséges, az értelmezési tartomány alsó határán a nullához balról tartó értékek jelennek meg,

\*\* az értékek arra utalnak, hogy az előrejelzés lehetősége kizárt.

A 15. táblázatban az illetékt modell és az adatsor összevetése alapján levonható jellemzők találhatók.

Folyamat	Növekedés időszaka	Max.,Min., Törés Időpontja	Csökkenés időszaka	Bizonytalan változás időszaka	Fő változás időpontja	Kiegyen- súlyozódás
1. Burgonya	1986-2001	1986(min)	1960-1986	2001-2015	1986	bizonytalan
2. Csalpot	1960-1991	1991(max)	1991-1997	1997-2015	1991	várható
3. Dolgozó	1960-1977	1977(max)	1977-1998	1998-2015	1977	megjelent
4. Földgáz	1960-1986	1986(max)	1986-2015	---	1986	várható
5. Kórágyak	1960-1989	1989(max)	1989-2015	---	1989	várható
6. Nyugdíjas	1960-1999	1999(max)	1999-2015	---	1999	bizonytalan
7. Ovodások	1960-1981	1981(max)	1981-2015	---	1981	várható
8. Pamutsz	1960-1977	1977(max)	1977-2015	---	1977	várható
9. Sör	1960-1990	1990(max)	1990-1999	1999-2015	1990	bizonytalan
10. Telhívás	1960-1999	1999(max)	1999-2015	---	1999	bizonytalan
11. Tojásdb	1960-1990	1990(max)	1990-2015	---	1990	bizonytalan
12. Utasszám	1960-1987	1987(max)	1987-1997	1997-2015	1987	bizonytalan

15. táblázat. Változások

Az 56 év alatti változások jellegét meghatározó táblázatból levonható következtetések, valamint a folyamat lefutási karakterét bemutató értékek ismeretében a következők állapíthatók meg:

a.) A minden egyes folyamatot leíró függvénygörbe egy szélsőértékkel, maximummal rendelkezik, az 1.) eset kivételével.

b.) A folyamat szélsőértéke eleget tesz az elsőderivált előjel váltásának, az érintő irány változása jól látható. Kivételt képez a 3.) és 8.) jelű eset.

c.) A 2015-ös év után a vizsgált tizenkét folyamatból 6 esetben kiegyensúlyozódás várható.

d.) A folyamatok kedvezőtlen alakulásának időtartama változó.

e.) A változást az 1977-1999 éves időszak jelzi. A 12 esetből azonban 8 esetben ez az 1981-1991. időintervallumra esik.

### 3. Összefoglaló

Mivel a vizsgált 56 év 12 különböző változást leíró statisztikai adatsorának regressziós elemzéséhez ugyanazon szerkesztett, összetett, nagy rugalmasságú függvény használatára került sor, így a folyamatok azonos rendszerű elemzésének adott volt a lehetősége. Ennek alapján az előbbiekben felsorolt öt megállapítás a vizsgált időintervallumon alapvető jellegű, és jól mutatja a vizsgált adatsorok változását, annak jellegét és következményeit. Természetesen szükségesnek mutatkozik a 2015-ös évtől kezdett alapos adatgyűjtés, annak érdekében, hogy megállapítható legyen az említett kiegyensúlyozódás illetve az adott esetben pozitív irányú fejlődés.

### Irodalomjegyzék

- [1] **Csanády V., Horváth-Szováti E., Szalay L.**, Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó, 2013.
- [2] Központi Statisztikai Hivatal honlapja, <https://www.ksh.hu/stadat>.