

Négydimenziós konvex politóp ábrázolása GeoGebrával

Talata István

Szent István Egyetem,
Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest,
és Dunaújvárosi Egyetem, Dunaújváros
talata.istvan@ybl.szie.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Bemutatjuk, hogy a GeoGebra dinamikus geometriai szoftverrel hogyan lehet ábrázolni egy 4-dimenziós konvex politópot a 3-dimenziós euklideszi térben centrális vetületként, majd összegezzük a szerzőnek a témakörrel kapcsolatos oktatási tapasztalatait.

ABSTRACT. We demonstrate how one can visualize a 4-dimensional convex polytope with GeoGebra, represented by its central projection in the 3-dimensional Euclidean space. Then we sum up the educational experiences of the author in this subject.

1. Bevezetés

Megmutatjuk, hogyan tudunk szemléltetni egy adott 4-dimenziós konvex politópot annak 3-dimenziós térre történő centrális vetületeivel, melyek 3-dimenziós poliédercellákból állnak. A politóp modellezéséhez és a 3-dimenziós vetületének az ábrázolásához a GeoGebra dinamikus geometriai szoftvert használjuk (ld. [3]).

A 3-dimenzióban centrális vetületként történő ábrázolás azért kézenfekvő, mert az emberi látásnak megfelelő centrális projekció (amely a 3-dimenziós térben egy síkra történő középpontos vetítéssel biztosít perspektív nézetet) 4-dimenziós térbeli analogonja egy 3-dimenziós affin altérre (vetítőhipersíkra) történő centrális projekció, és ez az altér azonosítható a 3-dimenziós euklideszi térrel (ld. [1], [4], [5] hivatkozásokat a 4D alakzatok 3D-ben történő szemléltetése témakörben).

Mivel a dimenziócsökkenéssel információvesztés jár együtt, ezért az alkalmazott centrális vetítést többféle nézőpontból, a centrum és vetítőhipersík együttes megváltoztatásával is célszerű elvégezni (akár folytonos keringést végezve), amely művelet felfogható úgy is, hogy a centrum és a vetítőhipersík (valamint egy hozzájuk tartozó koordináta-rendszer) fix, és a 4-dimenziós konvex politóp mozog, ill. változtatja méretét (eltolás, forgatás és középpontos nyújtás alkalmazásainak hatására).

A SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karon a „Matematika és geometria az építészetben” választható tárgy keretein belül foglalkoztunk ezzel a problémával, mert ezen izgalmas, emberi fantáziát megmozgató témakör kapcsán a geometriai transzformációk matematikai elméletébe is mélyebb betekintést tudunk nyújtani a hallgatóknak. (Így a síkbeli és háromdimenziós térbeli számításokkal teljesen analóg módon lehetett megadni a forgatás és

KULCSSZAVAK. Szabályos test, konvex politóp, transzformáció mátrix, láthatóság, dinamikus geometria, GeoGebra.

KEYWORDS. Regular solid, convex polytope, transformation matrix, visibility, dynamic geometry, GeoGebra.

vetítés eredményét a 4-dimenziós térben, ahol már a szokásos ábrázolási módszerek nem lehetségesek.) Továbbá a transzformációk hatását vetületek segítségével is tudtuk láttatni a hallgatók számára úgy, hogy érdekes háromdimenziós alakzatok ábrázolására vezetett ez a feladat.

2. Konvex politópok

Egy d -dimenziós konvex politópon (ahol $d \geq 1$ egész szám) a d -dimenziós euklideszi tér véges sok zárt félterének a metszetét értjük, ha az egy nemüres belsejű korlátos részhalmaza a térnek. Megmutatható, hogy ezzel ekvivalens véges sok, nem egy közös hipersíkban elhelyezkedő pont konvex burkaként definiálni a konvex politópot. Egy d -dimenziós konvex politóp beágyazható egy d -nél magasabb dimenziós euklideszi térbe, ha annak egy d -dimenziós affin alterének a részhalmazaként van megadva. A politóp határán k -dimenziós lapok helyezkednek el ($0 \leq k \leq d - 1$), és $k = 0, 1, 2, 3, d - 1$ esetén ezeket csúcsoknak, élnek, 2D-lapoknak, 3D-lapoknak, ill. hiperlapoknak nevezzük (tehát $d = 4$ esetén a hiperlapok a 3D-lapok). A csúcsok konvex burka kiadja a konvex politópot, a hiperlapok uniója kiadja a politóp határát, a hiperlapok egy cellarendszert ($(d - 1)$ -dimenziós konvex politópokat) határoznak meg, egymáshoz $(d - 2)$ -dimenziós lapjaikkal csatlakozó elemekkel (ld. [6]).

A 3-dimenziós euklideszi térben a konvex politópot konvex poliédernek hívjuk. A d -dimenziós konvex politópokat röviden konvex d -politópoknak is nevezzük.

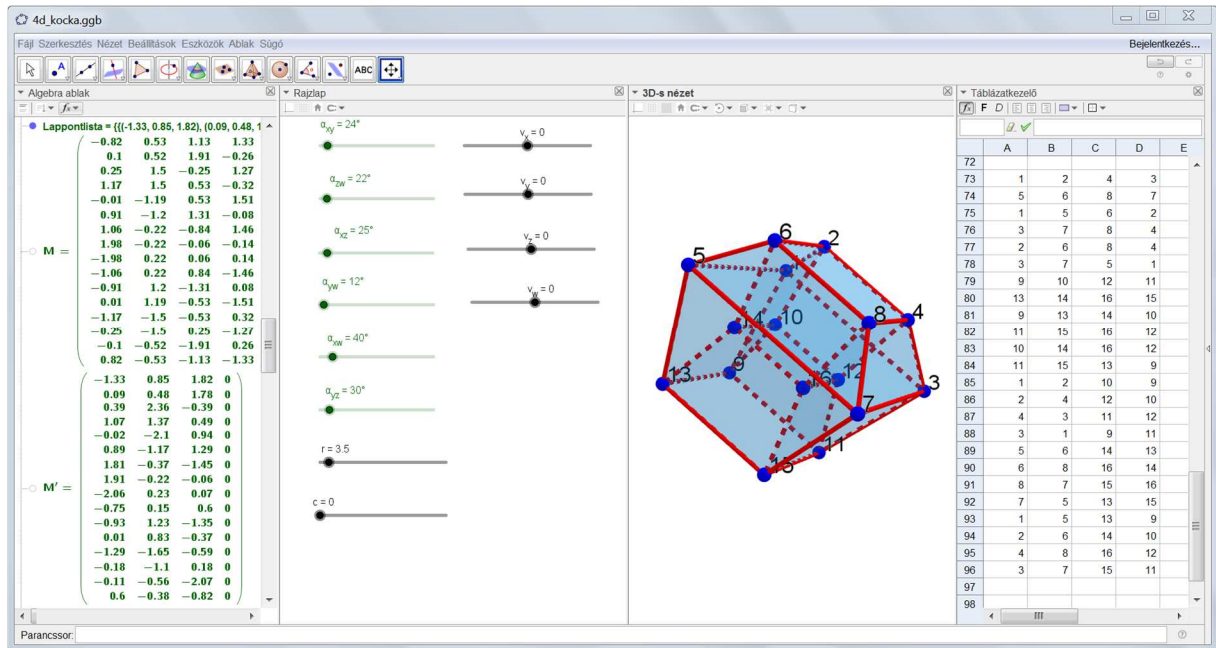
A 4-dimenziós konvex politópok közül az egyik legnevezetesebb osztály a szabályos konvex 4-politópoké. Ezt az a 6 politóp alkotja, amely a 3-dimenziós szabályos poliéderekkel analóg módon szabályos hiperlapokkal rendelkezik, és a csúcsalakzata is szabályos, azaz bármely csúcsához közel elmerszhető egy olyan hipersíkkal a politóp, mellyel a metszete egy szabályos 3-dimenziós poliéder, és az annak a középpontján átmenő és a hipersíkra merőleges egyenes áthalad a csúcson is. (Ezzel a metszet szimmetriái a csúcsalakzat és egyben az egész politóp szimmetriáivá is kiterjeszthetők.)

A szabályos konvex 4-politópok: 4-szimplex (5-cella, a tetraéder analogonja), 4-keresztpolitóp (8-cella, az oktaéder analogonja), 4-kocka (16-cella, a kocka analogonja), 24-cella (nem analogonja egyik háromdimenziós szabályos poliédernek sem, azonban a rombikus dodekaéder analogonja, amely 3-dimenzióban nem szabályos test), 120-cella (a dodekaéder analogonja), és a 600-cella (az ikozaéder analogonja), ld. [2]. A cellák száma az elnevezésekben a hiperlapok számát adja meg. A 120-cellának már 600 csúcsa és 1200 éle van, a 600 cellának pedig 720 éle és 1200 2D-lapja van, ezért ezeknek elég nehézkes a szemléltetése. Emiatt ez utóbbi politópoknak gyakran csupán a hiperlapjaik egyes csoportjait (melyek bizonyos értelemben összetartozó elemekből állnak) szokás egyszerre ábrázolni (3-dimenziós vetületeikkel szemléltetve azokat), hogy még felismerhetők legyenek az egyes ábrázolt alakzatok.

3. Modellezés és szemléltetés GeoGebrával

A következőkben leírjuk a 4-dimenziós politópok GeoGebrában történő modellezésének és ábrázolásának a lépéseit, ahogy azt megvalósítottuk a SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karon a „Matematika és geometria az építészetben” választható tárgy keretein belül.

Az adott kurzuson a 4-dimenziós kockát készítettük el ilyen módon, a hallgatók házi feladatként hasonló módon elkészítettek egy-egy másik szabályos konvex 4-politópot (a 4-keresztpolitópot, ill. a 24-cellát).



1. ábra. A modellezés GeoGebra munkalapja

Az itt leírt módszer tetszőleges konvex 4-politóp ábrázolására használható, ennek csupán az lehet a gátja, ha a politóp olyan sok elemből áll, hogy azt már a szoftver (jelen esetben a GeoGebra) nem tudja kezelni.

3.1. Csúcsok megadása

Először felvisszük a csúcsok koordinátáit, n csúcs esetén egy $n \times 4$ -es mátrixba, amelyben az egyes sorok tartalmazzák egy-egy csúcs koordinátáit a 4-dimenziós térben. Azért nem a szokásos oszlopvektor megadást választottuk az egyes csúcsokra, mert sorvektorok esetén jobban látható a mátrix a bal oldalon elhelyezkedő Algebra ablakban.

Ha a Táblázatkezelő celláiba gépeljük be a 4-kocka csúcsait, pl. az összes ± 1 értékű koordinátát tartalmazó koordináta-négyesekként, akkor a 16 csúcs miatt 16×4 -es tömböt kapunk. Ezután kijelölve a cellákat, jobb egérgombbal klikkelve, kiválasztható a Létrehozás \rightarrow Mátrix opció, végül az elkészült mátrix átnevezhető egy kívánt (pl. M_0) névre.

3.2. Csúcstranzformáció

Eltolás és forgatás együttes alkalmazásával valósítjuk meg a csúcspontok tetszőleges mozgását.

A 4-dimenziós térben 2-dimenziós affin alterek körül lehet forgatni. Az összes 2-dimenziós koordinátasíkra elkészítünk egy-egy forgatási mátrixot (a rájuk merőleges 2-dimenziós koordinátasíkok pontjai a forgatás fixpontjai): (x, y, z, w) változókat használva az egyes koordinátákra, az $F_{xy}, F_{zw}, F_{xz}, F_{yw}, F_{xw}, F_{yz}$ forgatási mátrixok F szorzatmátrixa az alkalmazott forgatások együttes hatására keletkező forgatás mátrixa. Például az F_{xy} így adható meg (az α_{xy} szöveget úgy adjuk meg, hogy értéke egy csúszkán állítható legyen):

$$F_{xy} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{xy}) & -\sin(\alpha_{xy}) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_{xy}) & \cos(\alpha_{xy}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A többi forgatási mátrix is hasonlóan adható meg, csak esetükben értelemszerűen nem az első két koordinátában történik a forgatás, hanem másik koordinátapár alkalmazásával. Így összesen 6 forgatási szög állítható be csúszkán. Kevesebb forgatási szög is elégséges lenne ahhoz, hogy egy tetszőleges forgatást létrehozzunk, de előnyös az összes 2D-koordinátasíkon történő forgatás lehetőségét meghagyni a szemléltetéshez.

Egy v eltolásvektor alkalmazásával (melynek koordinátái mind állíthatók csúszkán) az M_0 mátrix minden sorára az $x_1 = x + v$ képlettel kiszámítjuk az eltoltját (így keletkezik az M_1 mátrix), majd az $M = M_1 \cdot F^T$ transzponált mátrixot tartalmazó mátrixszorzás után megkapjuk az eltolt, majd forgatott csúcsok M mátrixát.

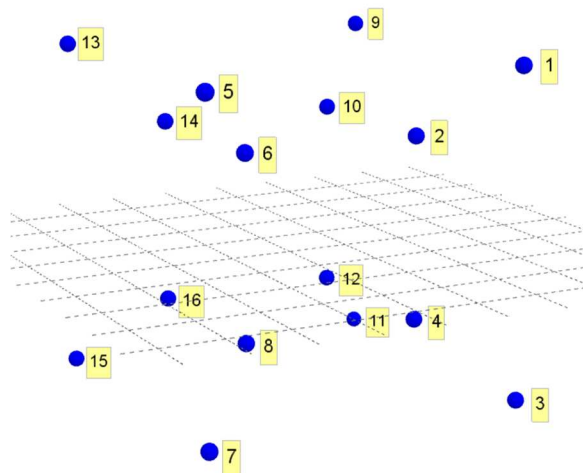
Nyújtást nem alkalmazunk (amely a zoomolásnak felelne volna meg), ennek hatását a vetítőhipersík helyzetének a megváltoztatásával (párhuzamos eltolásával) tudjuk majd imitálni (ld. a modellezés következő lépését).

3.3. Centrális projekció

Egy paramétertől függő vetítési centrumot hozunk létre a $K(0,0,0,r) \in \mathbf{R}^4$ pontban, a vetítési hipersíknak pedig a $w = -c$ egyenlethez tartozó hipersíkot vesszük fel ($r > 0$, $c \geq 0$ csúszkán állítható paraméterek).

A vetítőhipersíkra történő centrális projekció képlete egyszerűen kiszámítható. Ha egy $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ helyvektorú pont vetülete az $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^4$ helyvektorú pont, melyre így az $\langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle = a$ egyenlet teljesül (amely azt fejezi ki, hogy \mathbf{y} végpontja a vetítőhipersík egy pontja), ahol $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^4$ a vetítési hipersík normálvektora, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzatot jelöl, $a \in \mathbf{R}$, és $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^4$ a centrális projekció középpontjának helyvektora, akkor azt keressük, hogy hol található \mathbf{y} végpontja az \mathbf{x} és \mathbf{k} helyvektorú pontok által meghatározott egyenesen, azaz felírható $\mathbf{y} = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{k}$ alakban, és keressük az ebben szereplő $t \in \mathbf{R}$ paraméter értékét. Ez a következőképp tehető meg:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{k} = \mathbf{k} + t(\mathbf{x} - \mathbf{k}), & \langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle &= a, \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{k} + t(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \rangle &= a, \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{k} \rangle &= a, \\ t &= \frac{a - \langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle}. \end{aligned}$$



2. ábra. A csúcsok vetülete az indexfelirataikkal

Jelen esetben $\mathbf{n} = (0,0,0,1)$, $\mathbf{k} = (0,0,0,r)$, $a = -c$, ezért

$$t = \frac{-c - r}{\mathbf{x}_4 - r},$$

ahol \mathbf{x}_4 a 4-edik, w koordinátája az \mathbf{x} vektornak. Az így kiszámított vetítést alkalmazzuk az összes transzformált csúcsra, azaz az M mátrix minden sorára. A vetítés után kapott M' mátrix soraiban a 4-edik koordináták mind $-c$ -vel egyenlők, azokat elhagyva egy $n \times 3$ -as N mátrix készíthető, amelyből a

Pontlista=Sorozat(Pont(Elem(N, i)), i, 1, n)

paranccsal egy pontlista készíthető, ez ábrázolásra kerül a GeoGebra 3D-s nézet ablakában.

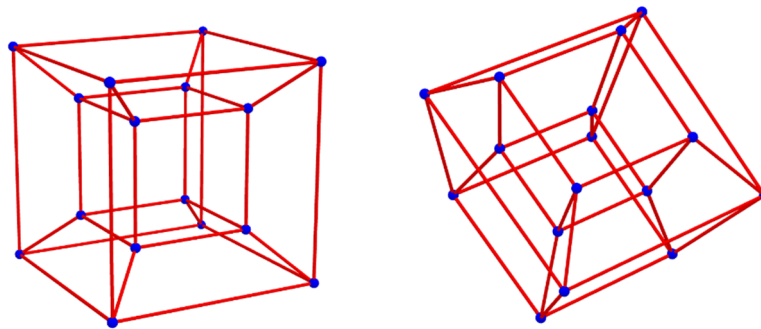
Az élek, majd később a lapok vetületének az elkészítéséhez segítséget nyújthat, ha látjuk az egyes csúcsok sorszámait (indexeit). Ehhez létrehozunk egy feliratlistát:

Feliratlista=Sorozat(Szöveg(i, Elem(Pontlista, i) + (0.1, 0, 0)), i, 1, n)

Azért szerepel a fenti parancsban egy (0.1,0,0) vektorral történő eltolás, hogy a felirat ne lógjon bele a csúcsot reprezentáló kis gömbbe.

3.4. Élek vetülete

A Táblázatkezelőben felvisszük az élek indexeinek listáját, ez egy $n_1 \times 2$ -es tömb azon (i, j) indexpárokkal ($1 \leq i < j \leq n$), melyekre az i -edik és a j -edik csúcs (azaz az M i -edik és j -edik sorához tartozó csúcsok) éllel vannak összekötve. Ebből készítünk egy $n_1 \times 2$ -es élmátrixot. A 4-kocka esetén ez egy 32×2 -es mátrix.



3. ábra. Élek ábrázolása különböző nézetekben

Majd készítünk egy éllistát a csúcsok vetületeit összekötő szakaszokból az élekhez tartozó csúcspárok esetén:

Ellista=Sorozat(Szakasz(Elem(Pontlista, Elem(Elmatix, i, 1)), Elem(Pontlista, Elem(Elmatix, i, 2))), i, 1, n_1)

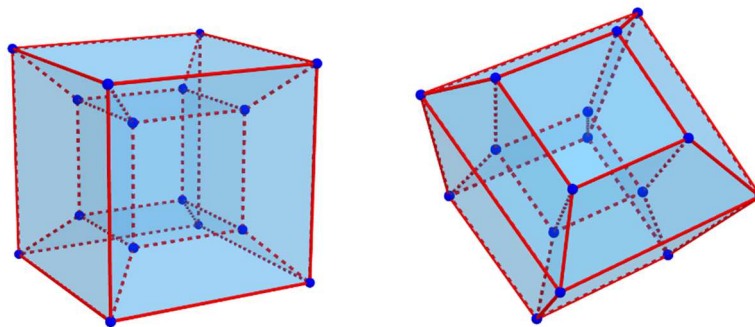
3.5. Lapok vetülete

A Táblázatkezelőben felvisszük a lapok indexeinek listáját, ez egy $n_2 \times k_2$ -es tömb azon indexekkel egy sorban, amelyekhez tartozó csúcsok egy 2-dimenziós lapon vannak, a megadás sorrendjében egymás után következve a sokszöglap határán (k_2 a 2D-lapok csúcsszámainak maximuma, és olyan lapok esetében, ahol kisebb a csúcsszám ennél, ott nullákkal pótoljuk ki a tömb érintett sorát). Ebből egy $n_2 \times k_2$ -es 2D-lapmátrixot készítünk Lapmatrix néven. A 4-kocka esetén ez egy 24×4 -es mátrix.

Majd egy laplistát készítünk a csúcsok vetületeire illeszkedő sokszögekből a 2D-lapokhoz tartozó csúcsok esetén úgy, hogy először egy Lappontlista listában felsoroljuk egy 2D-lap vetületének a csúcsait, majd ezekhez készítjük el a sokszögeket 3-dimenzióban:

- $Lappontlista = \text{Sorozat}(\text{Sorozat}(\text{Elem}(\text{Pontlista}, \text{Elem}(\text{Lapmatrix}, i, j)), j, 1, k_2), i, 1, n_2)$
- $Laplista = \text{Sorozat}(\text{Sokszög}(\text{Elem}(\text{Lappontlista}, i)), i, 1, n_2)$

Az előbbi parancsok közül a Lappontlista megadási parancsa akkor működik jól, ha minden 2D-lap pontosan k_2 csúccsal rendelkezik – ha nem ez a helyzet, akkor kicsit módosítani kell a parancson, a Lapmatrix i -edik sorából csak a nem nulla értékekre végeztetve el a számítást.



4. ábra. Lapok megjelenítése különböző nézetekben

4. További lehetőségek GeoGebrával

A következőkben felsorolunk néhány, a fentebb leírt modellben még nem megvalósult ábrázolási, ill. modellezési lehetőséget, melyekkel továbbfejlesztve a modellt, még szemléletesebbé tehető az ábrázolás, vagy egyszerűbbé tehető a modellkészítés.

4.1. Vetületi kép korrekciója

A kapott 3-dimenziós vetület csak akkor helyes, ha nincs olyan csúcs, melynek a z koordinátája r -nél nagyobb, ugyanis ilyen esetben annak a csúcsnak nem létezik vetülete a vetítő hipersíkra, mert a vetítősugár félegyenese nem metszi azt a hipersíkot. Mivel a modell az egész vetítőegyenest a vetítőhipersíkkal vett metszéspontját számítja ki, így ilyen esetben kapunk egy fals csúcsvetületet, és az abba a csúcsba futó élek, ill. a csúcsra illeszkedő sokszögek vetületei sem lesznek helyesek. Az érintett élek helyett félegyenéseket kellene berajzolni, mert az élek vetülete ilyenkor nem korlátos. Az érintett 2D-lapok helyett pedig síkbeli nem korlátos konvex sokszögtartományokat kellene berajzolni. Ha nem konvex a 3D vetületi kép, akkor tudhatjuk, hogy ezzel a problémás esettel állunk szemben, ekkor állítsuk r értékét megfelelően nagyra.

4.2. Láthatóság

A láthatóság nem került megoldásra ebben a modellben, így a hiperlapok vetületeinek cellái kétszeresen fedik le a vetület konvex burkát, a látható (azaz a vetítősugáron a centrumhoz közelebbi pontokat tartalmazó hiperlapok vetületcellái) és a nem látható (azaz a vetítősugáron a centrumtól távolabbi pontokat tartalmazó hiperlapok vetületcellái) részek mind ábrázolásra kerülnek. Azonban konvex d -politóp hiperlapjainak a normálvektorait ismerve könnyen eldönthető a láthatóság. Ugyanis akkor és csak akkor látható egy konvex d -politópnak egy hiperlapja, ha a vetítés centruma a hiperlap által kifeszített hipersíknak a

politópot nem tartalmazó nyílt félterében helyezkedik el. A vetítési centrum helyvektorának a hipersík normálvektorával vett skalárszorzatával mindez könnyen leellenőrizhető, mint ahogy az is, hogy mely élek és 2D-lapok fekszenek egy 3D-lapon, ennek eldöntéséhez elég a 3D-lap normálvektorának a skaláris szorzatát kiszámítani az él vagy 2D-lap egy tetszőleges relatív belső pontjával (pl. a csúcsaik súlypontjával).

4.3. Tetszőleges 2-dimenziós sík körüli forgatás

A 4-dimenziós térben tetszőlegesen beállítható, de fix 2-dimenziós sík körüli forgatás megvalósítása hiányzik a modelltől, csupán speciális irányú forgatások egyszerre történő alkalmazásával jön ki általános irányú forgatás. Érdeemes lehet ilyen fogatást is megvalósítani.

4.4. Konvex burok laphálójának kiszámítása

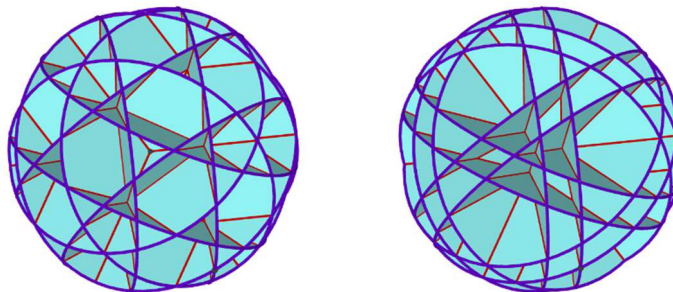
A csúcsok megadása már meghatározza a konvex burok lapstruktúráját, de sajnos a GeoGebra nem teszi lehetővé ennek a lapstruktúrának a kiszámítását általános esetben, mivel ez a szoftver inkább ábrázolásra alkalmas, nagyobb mennyiségű számítás elvégzésére már nem. Szerencsére, ha már ismert a lapstruktúra, vagy más módon ki tudjuk azt számítani, akkor az élek, 2D-lapok és akár a 3D-lapok illeszkedései is felvihetők GeoGebrába (a 3D-lapokat azért nem vittük fel a 4-dimenziós modellbe az ábrázolásakor, mert azok vetületeit közvetlenül úgysem lehet ábrázolni, hanem csak a 2D-lapjaikat, ill. éleiket). Mindenesetre jó lenne, ha a csúcsok koordinátáin túlmenően minél kevesebb adat bevitele lenne szükséges a modell számára.

5. Oktatási tapasztalat

A SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karon a „Matematika és geometria az építészetben” választható tárgy keretein belül foglalkoztunk ezzel a témakörrel.

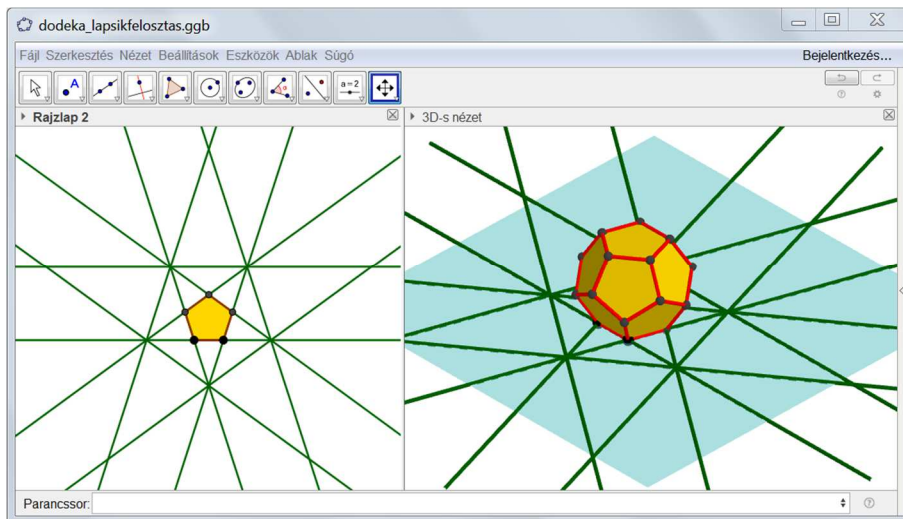
A CAD programok és egyéb 3D grafikai programok használatával a hallgatók elkényelmesedtek, mivel a 3D transzformációk (forgatás, tükrözés, nyújtás, eltolás), és a 3D keringés is kényelmesen, közvetlenül megvalósíthatók az ilyen programokban. Nincs igényük a mögöttes matematikai műveletek megismerésére.

Azért, hogy a geometriai transzformációk matematikájába jobb betekintést nyújtsunk a hallgatóknak, és a számukra is érdekes témakörrel tegyük ezt, elvégeztük a 4-dimenziós terek egy alakzatának (4-dimenziós kocka) a 3-dimenziós térre való centrális projekcióját, az alakzat forgatását, eltolását lehetővé téve szemléltetéskor.



5. ábra. Szabályos dodekaéder lapsíkjai térfelosztásának az ábrázolása lapsíkokba rajzolt körlapokkal, különböző sugárméretek esetén

A láthatóság megvalósítására már nem jutott idő ebben az esetben. Azonban 3D konvex szabályos, ill. archimédeszi poliéderekre kaptak olyan feladatot a hallgatók, hogy vizsgálják meg, hogy a poliédernek milyen laphalmazai láthatók egyszerre centrális vetületként – ez attól függ, hogy a lapok síkjainak melyik oldalán helyezkedik el a vetítési centrum, tehát a lapsíkok általi térfelosztást vizsgálták a hallgatók több-kevesebb sikerrel, de nagy lelkesedéssel.



6. ábra. Szabályos dodekaéder lapsíkjai térfelosztásának az ábrázolása az egy lapsíkba metsző többi lapsík egyenesmetszeteivel

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Németh Lászlónak, hogy erről a témakörrel előadhattam Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2017-es programjában.

Irodalomjegyzék

- [1] 4D Visualization, <http://eusebeia.dyndns.org/4d/vis/vis>.
- [2] **Coxeter, H. S. M.**, Regular complex polytopes, Cambridge University Press (1991), pp. 210. ISBN 05-213949-0-2.
- [3] GeoGebra, <https://www.geogebra.org/>.
- [4] **Gévy, G., Miyazaki, K.**, Négydimenziós téridomok szemléltetése (Visualizing 4-dimensional geometric shapes), VII. Multimédia az oktatásban konferencia, Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem, Budapest, 2001. Konferenciakiadvány, http://www.mmo.njszt.hu/Kiadvanyok/2001/index_2001.htm (2001), 1-6.
- [5] **Kolcun, A.**, 3D visibility of 4D Convex Polyhedra. In: WSCG'2005 Poster Proceedings. Plzeň: Západočeská univerzita, 2005. Západočeská univerzita (2005), 35-36. ISBN 80-903100-8-7.
- [6] **Szabó L.**, Konvex geometria, Egyetemi jegyzet, ELTE (1996) pp. 136.