Gönye Zsuzsanna

SZÖGFÜGGVÉNYEK BEVEZETÉSE A KÖZÉPISKOLÁBAN

1. Bevezetés

A szögfüggvények tanítása több szempontból is fontos anyagrész a középiskolai matematikaoktatásban. Matematikai szempontból azért, mert összekapcsolja az algebrát és geometriát, a függvényábrázolással pedig az analízis elemei is előkerülnek. Interdiszciplináris szempontból azért, mert sokféle alkalmazását mutathatjuk meg, például fizikában, biológiában, építészetben, mérnöki tudományokban, de akár a hétköznapi életben is.

Új fogalmak bevezetésére Pietsch német matematikadidaktikus szerint három különböző lehetőség van, az induktív, a deduktív és a konstruktív út *[Ambrus 1995]* Mindhárom módszer alkalmazható e tananyag tárgyalásánál. Kutatások alátámasztják, hogy akkor sajátítunk el mélyebben egy új anyagot, ha annak feldolgozásában tevékenyen részt is veszünk. E felfedező tanulást én az óráimon gyakran feladatlapokkal érem el. Az anyag egy részét megbeszéljük óra elején, ezután következik az önálló munka. A feladatlapokat minden diák megkapja, és azon önállóan vagy kisebb csoportban, sokszor párban dolgozhatnak. Miközben dolgoznak, a tanár körbe tud járni a csoportok munkáját figyelve, és ahol észreveszi, hogy elakadtak, ott egy-egy kérdéssel lendíti tovább a gondolkodás menetét. Lényeges hogy mi ne adjuk meg a megoldást, hanem kérdezzünk. A kérdés legyen minél egyszerűbb. Sokszor elegendő visszautalni egy korábbi feladatra, emlékeztetni a diákot, hogy idézze azt fel, mert lehet, hogy az ottani ötlete itt is használható. Kerüljük el azt, hogy a diák által feltett kérdésre mi válaszoljunk. Próbáljuk inkább rávezetni őt a válaszra. A legtöbbet akkor tanul a diák, ha meg tudja fogalmazni a problémáját, és aztán meg is tudja rá találni a megoldást. Ennek az útnak a megkeresésében kell nekünk segíteni. Ha ő maga találja meg a megoldást, az sikerélményt és magabiztosságot is ad neki. Egy feladatlap több problémát tartalmaz, így mindenki a saját ütemében haladhat. A csoporttól függőn lehet a feladatlapokon változtatni, bizonyos feladattípusból többet vagy kevesebbet adni. Ha a csoportban nagyon különböző diákok vannak, akkor pedig a lap aljára lehet néhány érdekes, vagy éppen nehezebb, fejtörő feladatot hozzáadni. Ebben a tanulmányban a 10. osztályos gimnáziumi tananyag minden kisebb egységéhez összegyűjtöttem minta feladatokat. Ezekből és ehhez hasonló feladatokból lehet összeállítani az aktuális feladatlapokat, nagyon ügyelve a sorrendre, hogy egyik feladat segítse a következő megértését illetve megoldását. Óra végén pedig érdemes összefoglalni az órán szerzett tapasztalatokat.

Akármennyire is úgy tűnik, hogy a mai diákok nagyon jártasak a technikai eszközök használatában, mindenképpen időt kell szánni arra, hogy megtanulják a számológép használatát ebben a témakörben. Fontos, hogy mindenki a saját számológépét használja, mert elég nagy különbségek vannak a mai gépek között, ami kezdetben zavaró lehet számukra. Ideális esetben mindenkinek azonos modellje lenne, ami a tanítást jelentősen megkönnyítené, de mivel a valóságban ez nem így van, ezért érdemes itt is egyéni vagy csoportfeladatokat adni. A feladatok elvégzése közben így körbe tudunk menni, és mindenkinek egyénileg tudunk segíteni a számológép használatában. Szerencsére technikai eszközökkel kapcsolatban szívesen segítenek a diákok egymásnak is. Mivel a mai gyerekek nagy részének van olyan telefonja, amire számológép alkalmazás letölthető, én nem zárkózom el ennek használatától sem. Természetesen dolgozat alatt csak hagyományos számológép használatát engedjük. Azt egyébként gyorsan meg szokták tapasztalni, hogy jobb, ha azon a gépen gyakorolnak, amit a dolgozatban is használni fognak, különben sok idejük elmehet a gombok és funkciók keresgélésével. Úgy gondolom, azért jobb, ha megtanulja kezelni az applikációt a telefonnál, mert később, a hétköznapi életben nagyobb valószínűséggel lesz nála a telefonja, mint a számológépe. Éppen emiatt érdemes kicsit beszélgetni velük a többi matematikai applikációról is, nem csak a telefonosokról, hanem a számítógépesekről is. Sokszor elegendő csak említeni párat, meglepően érdeklődők és tájékozottak tudnak lenni, és szívesen néznek utána ezeknek.

2. Szögfüggvények derékszögű háromszögekben

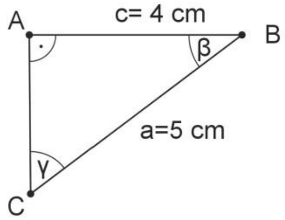
Hagyományosan a szögfüggvényeket először hegyesszögekre értelmezzük. Ennek alapja a hasonlóság, ezért a szögfüggvényeket hagyományosan közvetlenül a hasonlóság témaköre után tárgyaljuk. Megfigyeljük, hogy hasonló derékszögű háromszögekben a megfelelő oldalak aránya állandó. A hányadosban szereplő két oldalt viszonyíthatjuk a derékszögű háromszögek azonos szögéhez, a lehetséges aránypárok felírásával kapjuk meg az α hegyesszög szinuszát, koszinuszát, tangensét, kotangensét, és a két kevésbé emlegetett értéket, a szekánst és koszekánst.

A szögfüggvények ily módon történő bevezetése megköveteli, hogy a diák fejében összekapcsolódjon a derékszögű háromszög egy hegyesszöge, és a háromszög oldalainak aránya. Ez a megközelítés azonban elég mechanikusan, csak matematikai alapon történik. A sok hétköznapi életből vett egyszerű alkalmazás barátságossá és hasznossá teszi az anyagrészt azzal, hogy könnyen belátja a diák az új fogalmak alkalmazhatóságát. Ezzel a megközelítéssel azonban problémák is vannak. Egyik probléma már magában az elnevezésben van: „függvény". Mivel hányadosként értelmezzük a $\sin\alpha$ értékét és általában nem kerül elő ennek a hozzárendelésnek a függvény volta, így a diákok nem függvényként tekintek rá. Egy másik probléma a becsléssekkel merül fel. A becsléseknek nagyon fontos szerepük van a természettudományos oktatásban, és sokat foglalkozunk vele általános iskolában. Itt ezt a témát mégis el szoktuk hallgatni, nem véletlenül. Ahhoz, hogy $\sin 10^{\circ}$ értékét becsüljük, szükségünk lenne egy olyan derékszögű háromszögre, melynek egyik hegyesszöge 10°. Szemléletesen, akár matematikai programmal, intuitív módon beláthatjuk, hogy a szinusz és tangens függvények monoton nőnek, míg a koszinusz és cotangens függvények monoton csökkennek hegyesszögekre nézve. Ha ezt a demonstrációt úgy mutatjuk be, hogy a háromszög átfogóját tartjuk fix hosszúnak, akkor már a szögfüggvények egységkörös bevezetését vetítjük előre. Ezek után a becslésekhez használhatnánk a nevezetes szögek szögfüggvényeit is, bár sok esetben ezek csak nagyon durva becslést adnának. Azonban ahhoz, hogy monotonitásról beszélhessünk, tovább kell lépni a szög-aránypár megfeleltetésből a függvények felé. Rá kell világítani, hogy ezzel a megfeleltetéssel egy függvényt definiáltunk, mely minden hegyesszöghöz egy valós számot rendel hozzá. Azért is hangsúlyozom ezt a problémát, mert a felsőoktatásba érkező diákokat oktatva tapasztalom, hogy sok hallgatónak gondot okoz a trigonometrikus függvények tárgyalása analízisből.

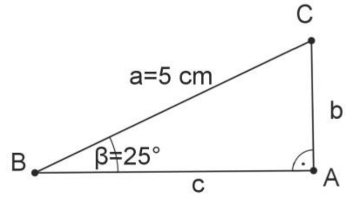
2.1. Feladatlap: Hegyesszögek szögfüggvényei

1) Határozza meg az ábrán látható háromszögek hiányzó adatait.

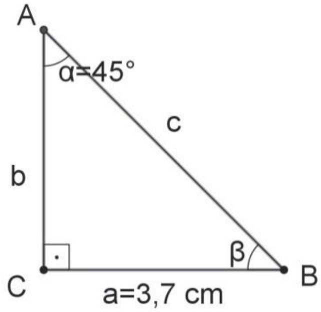
a)



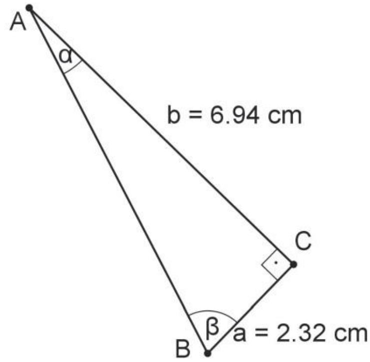
b)



c)



d)



2) Az α hegyesszög értékének kiszámítása nélkül határozza meg az α szög többi szögfüggvényének értékeit, ha

a) $\sin\alpha = 0,3$ b) $\tan\alpha = 5$.

3) Becsülje meg $\sin 75^{o}$ értékét.

4) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 15 cm, szárai 20 cm hosszúak. Mekkorák a háromszög szögei?

5) Egy háromszög két oldala 12 cm és 18 cm hosszúak, e két oldal által közrezárt szög 18^{o}. Mekkora a háromszög területe?

6) Egy egyenlő szárú háromszög szárainak hossza 8 cm, területe pedig 22,4 cm^2. Mekkorák a háromszög szögei?

7) Egy háromszög területe 32 cm^2, két oldala pedig 10 illetve 8 cm. Mekkora a két ismert oldal által bezárt szöge a háromszögnek?

Megjegyzések a Hegyesszögek szögfüggvényei feladatlaphoz:

A 3. feladatban két irányba is hagyhatjuk a diákokat dolgozni. Egyrészt jöjjenek rá, hogy a szinusz függvény monoton hegyesszögekre, így $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^{o} < \sin 75^{o} < 1$. Másrészt, anélkül hogy további ötletet adnánk, javasoljuk, hogy használhatnak szögmérőt is. Ezzel szeretnénk rávezetni őket egy 75^{o}-os derékszögű háromszög rajzolására, majd ennek a háromszögnek az oldalainak mérésével tudnak becslést adni a keresett szinusz értékre. Érdemes összehasonlítani a két becslést [Weber, K.].

Az utolsó két feladatban hagyjunk időt arra, hogy rájöjjenek arra, hogy két alapvetően különböző ilyen háromszög létezik.

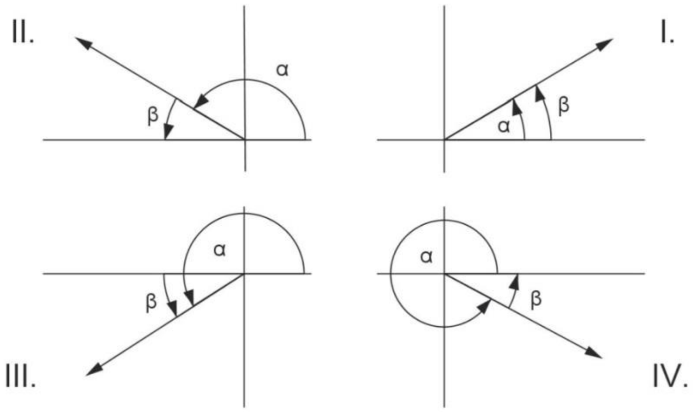
3. Szögfüggvények általánosítása

Tetszőleges szög szögfüggvényeit nem tudjuk hegyesszögű háromszögből számolni, ezért ehhez az egységkörös definíciót vezetjük be. Ez a definíció merően eltér az eddigitől, ráadásul míg a hegyesszögeknél a szöget általában fokban adjuk meg, itt folyamatosan áttérünk radiánra, tehát egyszerre két új dolgot is tanítanánk. Mindenképpen érdemes kitérni annak magyarázatára, hogy miért is van szükség az új szögmértékre. Egy fok a teljes kör 360-ad része. A szögnek ez az egysége a babiloniaktól származik, akik a kört először 6 egyenlő részre, majd azt még 60 részre osztották. Ez az egység a közéletben használatos, a megszokáson alapszik, de gyakorlatilag tetszőlegesen lett megválasztva. A radián kapcsolatot teremt a hosszúságmérték és a szögmérték között. Egy radián az a szög, amely alatt a sugárral megegyező hosszúságú ívhossz a középpontból látszik. A radián-mérték sok számolást egyszerűbbé tesz, például θ középponti szöghöz tartozó r sugarú körív hossza $r\theta$, ha a szöget radiánban mérjük, míg ha a θ-t fokokban mérjük, akkor az ívhossz $\theta\frac{\pi}{180}r$. Analízisben több határérték és derivált sokkal bonyolultabb lenne, ha nem radiánt használnánk. *[Kupkova 2005]* A radián használatát érdemes több feladaton keresztül gyakorolni, hogy használata természetessé váljon. A gyakorlófeladatok ne csak a két mérték közti átváltásokból álljanak, mert az olyan, mint a nyelvtanulásnál mikor minden szót külön-külön fordítgatunk. A mi célunk viszont az, hogy radiánban tudjanak a diákjaink gondolkodni. A következő feladatsorban ehhez találunk néhány ötletet.

Míg a szögfüggvényeknek a derékszögű háromszögeken alapuló definíciója a diákok korábbi tanulmányihoz közel áll, addig az egységkörös definíciója merőben más, megértése gyakran nehezen megy. Ennek oka az is, hogy a vektorokat és a koordináta geometria bevezetését is csak ekkoriban, részben éppen emiatt az anyagrész miatt tárgyaljuk, és így a vektor és koordináta fogalmak még nem mélyültek el kellően. Vonzó lehet esetleg az az ötlet, hogy hanyagoljuk a derékszögű háromszöges bevezetést, és egyszerre ugorjunk az egységkörre. Kutatások viszont azt igazolják, hogy trigonometrikus függvények mindkét bevezetésének megvan az előnye és hátránya, és nem szabad egyik módot sem hanyagolnunk. *[Kendal, Stacey 1996], [Kendal, Stacey1998]*

Mint tudjuk, ha a tanulási folyamat cselekvéssel párosul, akkor a megszerzett tudás gyorsabban és jobban rögzül, ezért érdemes több nagyméretű egységkörös ábrát készíteni. Lényeges hogy az ábrák elegendően nagyon legyenek, ehhez 10 cm átmérőjű köröket érdemes használni. Ez az anyagrész különösen alkalmas arra, hogy rövid magyarázat után feladatlapon önállóan dolgozzanak a diákok. Mielőtt a feladatlapot megkapnák, rajzot készítve elmagyarázzuk, hogy a pozitív x-tengelyt α szöggel elforgatjuk, az így kapott félegyenes az egységkört egy P pontban metszi. Ennek a P pontnak az x-koordinátáját nevezzük $\cos\alpha$-nak, az y-koordinátáját pedig $\sin\alpha$-nak. Tehát $P=(\cos\alpha;\sin\alpha)$. Az utolsó feladat kivételével az alábbi feladatsorban ne használjunk számológépet, ezért ha pontos értéket kérünk, akkor ügyeljünk arra, hogy a korábban tanult nevezetes szögekre visszavezethető legyen a feladat.

A koordináták meghatározásához használjuk a referencia szöget. Ez a fogalom a magyar tankönyvekben nem nagyon fordul elő, pedig éppen ezzel tudnánk összekapcsolni a szögfüggvények két tárgyalási módját. Referencia szögnek nevezzük azt a legkisebb pozitív szöget amit az egységvektor elforgatásakor a szög mozgó szára az x tengellyel bezár. Például $\frac{7\pi}{6}$ referencia szöge $\frac{\pi}{6}$. A definícióból adódik, hogy a referencia szög a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ zárt intervallumba esik. Az *1. ábrán* a referencia szöget szemléltettük a különböző síknegyedekben, ahol α referencia szöge a szög β.



1. ábra: Referencia szög

Attól függően, hogy melyik síknegyedben vagyunk a referencia szög kiszámítását az *1. táblázatban* foglaljuk össze.

Síknegyed	α referencia szöge
I.	α
II.	$\pi-\alpha$
III.	$\alpha-\pi$
IV.	$2\pi-\alpha$

1. táblázat: Szög és referencia szög összefüggése

Egy szögnek és a referencia szögének szinusza és koszinusza csak előjelben térhet el, az előjeleket a *2. ábrán* szemléltetjük. Ezzel a módszerrel tetszőleges szög szögfüggvényeinek kiszámítása visszavezethető a referencia szög szögfüggvényének kiszámítására, azaz derékszögű háromszögben való szögfüggvény kiszámítására. További előnye ennek az eljárásnak, hogy jobban rászorítja a diákokat az egységkörös ábrázolásra. Számológépet akkor érdemes csak elővenni, amikor nevezetes szögeken keresztül már begyakoroltuk a módszert.

2. ábra: Szögfüggvények előjele

3.1. Feladatlap: Egységkör

1) Rajzoljunk egy egységkört, az egység legyen most 5 cm. Szögmérő és vonalzó segítségével, keresse meg azt a P pontot az egységkörön, mely az α szöghöz tartozik, majd adjon közelítő értéket $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$ értékeire. Mely esetekben tud pontos értéket is adni?

a) $\alpha = 40^{\circ}$ b) $\alpha = 135^{\circ}$ c) $\alpha = 270^{\circ}$
d) $\alpha = -25^{\circ}$ e) $\alpha = -120^{\circ}$ f) $\alpha = 900^{\circ}$

2) Melyik nagyobb? Miért?

a) $\sin 23^{\circ}$ vagy $\sin 32^{\circ}$ b) $\sin 100^{\circ}$ vagy $\sin 110^{\circ}$
c) $\cos 210^{\circ}$ vagy $\cos 215^{\circ}$ d) $\sin 45^{\circ}$ vagy $\cos 45^{\circ}$
e) $\sin 23^{\circ}$ vagy $\cos 23^{\circ}$

3) Ha az $(1;0)$ pontból kiindulva, az egységkörön az óramutató járásával ellentétes irányba haladunk az adott szöggel (radiánban mérve) elfordulva, akkor melyik síknegyedbe érkezünk?

a) 3 b) 4,2 c) 6 d) 10

4) Igaz vagy hamis?

a) $\sin(-x) = -\sin(x)$ b) $\cos(-x) = -\cos(x)$ c) $\sin(x+3\pi) = -\sin(x)$
d) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ e) $\cos(x+6\pi) = \cos(x)$ f) $\cos(x-\pi) = \cos(x)$

5) Rajzoljunk megint egy egységkört, az egység legyen most is 5 cm. Keresse meg azt a P pontot az egységkörön, mely az α szöghöz tartozik, majd a referencia szög segítségével határozza meg $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$ pontos értékeit.

a) $\alpha = \pi$ b) $\alpha = 4\pi$ c) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$
d) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ e) $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ f) $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$
g) $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ h) $\alpha = \dfrac{-3\pi}{4}$ i) $\alpha = \dfrac{-\pi}{6}$

6) Határozzuk meg a kifejezés pontos értékét.

$$\cos 20^{\circ}+\cos 40^{\circ}+\cos 60^{\circ}+\cos 80^{\circ}+\cos 100^{\circ}+\cos 120^{\circ}+\cos 140^{\circ}+\cos 160^{\circ}$$

7) Egy hangya a $(0;-5)$ pontból indul egy origó középpontú körön, és az óramutató járásával azonos irányba megtesz $\frac{20\pi}{3}$ egységet a kör mentén. Számítsa ki a hangya helyének koordinátáit.

8) Egy hangya a $(0;-5)$ pontból indul egy origó középpontú körön, és az óramutató járásával azonos irányba megtesz 2,25 egységet a kör mentén. Számológép segítségével számítsa ki a hangya helyének koordinátáit.

Megjegyzések az Egységkör feladatlaphoz:

Minden egyes feladatnál rajzolják fel a diákok az egységkört a diákok, mindig legyen ott az ábra a feladat megoldása mellett, mert ez segíti az asszociáció kialakulását és elmélyülését. Az ábrázolás nagyon fontos része a tanulásnak. Csak az utolsó feladatnál használjanak számológépet.

Annak érdekében, hogy visszacsatolást kapjunk az anyagrész megértésének fokáról, feltehetjük azt az egyszerű kérdést, hogy „mit jelent a $\sin x$?” Kérjük a diákot, hogy saját szavaival próbáljon erre a kérdésre választ adni *[Weber, K.]*. Ideális esetben erre mindenkinek szóban és egyedül kellene válaszolni, mert az erre a kérdésre adott válaszából kiderül, hogy hol tart a tanulási folyamatban, és ekkor egyénileg lehet neki segíteni. A másik ilyen egyszerű tesztkérdés lehet, hogy „az x mely értékeire csökken $\sin x$?”

4. Trigonometrikus egyenletek

Ha az előző fejezetben sokat rajzoltunk, akkor könnyen érhető, hogy például a $\sin\alpha = 0,5$ egyenletnek miért is van olyan sok megoldása. A szögek visszakeresésénél mindenképpen érdemes felrajzolni az egységkört, így biztosabb, hogy az összes megoldást megtaláljuk. Alakítsuk ki, hogy szokásukká váljon a rajzkészítés. Az asszociáció nagyon fontos. Tapasztalatom alapján a diákok gyorsan nyúlnak a számológép után, aminek ugye az a „hibája” megvan, hogy a $\sin\alpha = 0,5$ egyenlet megoldásánál csak egyetlen értéket ad vissza a szögre. Ha sikerült elérni azt, hogy mikor szóba kerül a szinusz vagy koszinusz, azonnal megjelenik előttük az egységkör, akkor ez nem okoz gondot. Sőt, gyorsan fel tudják írni a számológép által megadott értékből az összes megoldást anélkül, hogy képletekben gondolkodnának. Itt érdemes megint egy kis időt fordítani a számológép használatra, megbeszélni, hogy milyen értékeket adhat ki a számológép, ugyan ekkor még nem kerülnek szóba az inverz trigonometrikus függvények.

Az egyenletek megoldásánál nagyon lényeges a fokozatosság. Az alábbi feladatsort ezen elv alapján építettem fel. Az első feladatban csak az alapkörön keressük a megoldásokat. A második feladatban már az összes valós megoldást keressük, tehát a megoldások végtelen elemű halmazok. A harmadik feladatban a megoldásokat megint egy korlátos intervallumon keressük, de itt már transzformált függvényekről van szó és általában nem az alapperióduson keressük a megoldásokat. A feladat megoldásánál érdemes az előző feladatot követni és felírni az összes megoldást, majd az így keletkezett halmazokból kiválogatni azokat melyek beleesnek a feladat által meghatározott tartományba. Végül az utolsó feladatba tettem olyan egyenleteket, ahol használni kell a számológépet, mert a megoldások nem nevezetes szögek. Ennél a feladatnál figyeljük meg, hogy a szögeket radiánban vagy fokban adják meg a diákjaink. Ebből látható, hogy mennyire mozognak otthonosan az új szögmértékben. Befolyásolja-e őket az, hogy az egyik egyenletben θ-val, a másikban pedig x-szel jelöltük a változót? Rákérdeznek-e arra, hogy hogyan kell megadni a megoldást? Ezen megfigyelések után kérhetjük, hogy akár mindkét módon írják fel a megoldáshalmazokat ügyelve arra, hogy a radiánban való megadásnál a periódus 2π, a fokokban való megadásnál pedig 360^{o} legyen.

4.1. Feladatlap (Trigonometrikus egyenletek I.)

1) Oldja meg az egyenletet a $0 \le x \le 2\pi$ intervallumon.

a) $\sin x = 0$ b) $\sqrt{2}\sin(x) = 2$ c) $2\cos x = \sqrt{3}$

d) $\sin^2 x = 1$ e) $4\sin^2 x - 3 = 0$ f) $\sin^3 x = \sin x$

g) $2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$ h) $\cos^2 x = 1 - \sin x$ i) $1 - \sin x - 2\sin^2 x = 0$

2) Oldja meg az egyenletet, adja meg az általános megoldás pontos alakját.

a) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin(3\theta) = -1$ c) $2\sin^2\theta + \sin\theta = 0$

d) $1 + \sin\theta = 2\cos^2\theta$ e) $\sin^2\theta - 1 = 0$ f) $\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}$

g) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ h) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -0,5$

3) Oldja meg az egyenletet az adott intervallumon.

a) $\sin(\pi x) = 0,5$ a $[0,2)$ intervallumon

b) $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1 = 0$ a $[0,8\pi)$ intervallumon

4) A számológépet használva keresse meg az egyenlet összes megoldását.

a) $\sin\theta = 0.84$ b) $\cos x = -0.63$ d) $4\cos^2 x = 2\sin x + 1$

A szinusz és koszinusz függvények megértése és gyakorlása után érdemes csak foglalkozni a másik két gyakran használt trigonometrikus függvénnyel, a tangenssel és kotangenssel. Ezek tárgyalásánál nem elegendő csak azt mondani, hogy $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, mert ezzel éppen a szemléletességet veszítenénk el. Meg kell mutatni, hogy az egységkörös ábrázoláson a tangenst az egységkörhöz az $(1;0)$ pontban húzott érintőn, a kotangenst pedig a $(0;1)$ pontba húzott érintőn tudjuk szemléltetni, ezek az ábrák megtalálhatók a tankönyvekben, ezért itt ezeket nem rajzolom le. Szintén segít, ha egy ábrát készítünk, melyben összefoglaljuk a tárgyalt trigonometrikus függvények előjeleit a különböző síknegyedekben, ahogy azt a *2. ábrán* láthatjuk.

4.2. Feladatlap (Trigonometrikus egyenletek II.)

1) Számológép nélkül, referencia szög segítségével határozza meg a kifejezés pontos értékét.

a) $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ b) $\tan\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ c) $\cot\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

2) Keresse meg az összes valós megoldást. Ahol szükséges használja a számológépet.

a) $\tan x = 1$ b) $3\tan x = -\sqrt{3}$ c) $\tan x = 3$

d) $\cot x = \frac{1}{2}$ e) $\tan(3x) = -1$ f) $\cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

3) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán.

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ b) $\sin(x) = \sin(2x)$ c) $\cos(2x) = \cos(3x)$

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(3x)$ e) $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \tan x$ f) $\tan x - 3\cot x = 2$

Megjegyzések

A 2/d) feladat különösen fontos. Olyan szögeket keresünk, melyek kotangens értéke 0,5. Nem nevezetes szögről van szó, tehát fejben nem oldható meg a feladat. Ez a feladat azért emelkedik ki a többi hasonló közül, mert a számológépeken nincsen rajta a kotangens függvény inverze, így ezt a feladatot nem tudják a diákok egyetlen gombnyomással megoldani. Érdemes leírni a feladat tangenses egyenletté való átalakítását, mert gyakran előfordul, hogy egy diák ugyan tudja, hogy reciprokot kell venni, de összekeveredik a műveleti sorrendben, és nem tudja, hogy mikor és minek kell a reciproka.

A 3/b) – d) feladatok megoldását az egységkörön beszéljük meg. Ha a jobb- és baloldalon ugyanazon szögfüggvény áll, akkor hogyan kell az argumentumoknak egymáshoz viszonyulni, hogy a két oldal egyenlő legyen? Ezekre a feladatokra a *6.1-es feladatsor* utolsó feladatában is szükségünk lesz.

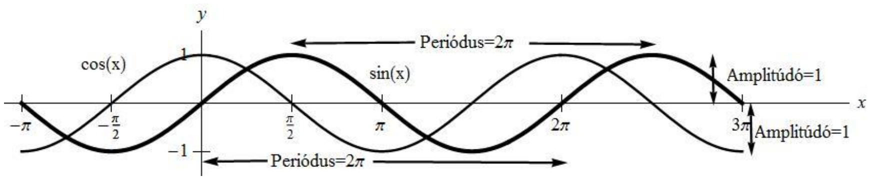
A 3/e) feladatban figyeljünk a kikötésre. A 3/f) feladatban se feledkezzünk meg a kikötésekről, hívjuk fel a figyelmet arra, hogy az egyenletben szereplő függvények értelmezési tartományára mindig figyelni kell erre, még mielőtt elkezdenék rendezgetni az egyenletet.

5. Szögfüggvények ábrázolása

A szögfüggvények egységkörös tanulása közben kialakul a függvényfogalom, és innét könnyen továbbléphetünk e függvények ábrázolására. Egy egyszerű motiváló feladat lehet, ha az $(1;0)$ pontból induló, az egységkörön az óramutató járásával ellentétesen egyenletes sebességgel haladó hangya függőleges illetve vízszintes pozícióját szeretnénk megvizsgálni, ábrázolni. Ezekre a vetítések bemutatására matematika programot is írhatunk, de szebbnél-szebb internetes applikációk is találhatók. *[Touch of Mathematics: Trigonometry]*

A középiskolás tankönyvekben ehhez az anyagrészhez hozzákapcsoljuk az előző évben tanult függvénytraszformációkat, és ezek segítségével tudjuk a trigonometrikus függvényeket ábrázolni. Tapasztalatom szerint a függvények transzformációja szintén egy nehéz anyagrész, melyet, ha jól meg is tanultak az előző évben, könnyen feledésbe merül. Ezért szükség van arra, hogy amikor csak lehet, beszéljünk a transzformációs lépésekről. A másodfokú függvények tárgyalásánál is volt erre lehetőségünk, de a trigonometrikus függvények ábrázolása még jobb alkalmat nyújt. Nem csak azért, mert ezek periodikus függvények, tehát a horizontális nyújtás illetve zsugorítás látványosabb változás már, hanem azért, mert az amplitúdó, középvonal, periódus, fáziseltolás fogalmai a segítségünkre lehetnek. Ezeket a fogalmakat ritkán vagy hiányosan tárgyalják a középiskolai matematika könyvek, holott két szempontból is fontos lenne. Egyrészt ki kellene használnunk a más tantárgyakkal való kapcsolódási pontokat. Fizikában pedig ezek a harmonikus rezgőmozgásnál és az egyenletes forgómozgásnál alapvető fogalmaknak számítanak. Másrészt a transzformált függvények ábrázolásához jelentős támpontokat és ellenőrzési lehetőségeket adnak. Ebben a cikkben én most csak ezekre a fogalmakra és ezek használatára koncentrálnék, hiszen a függvénytranszformációk használata már jól bevett módszer. Az új fogalmak nem helyettesítik a transzformációkat, inkább azzal párhuzamosan használjuk, egymás megértését és alkalmazását segítik.

Az alap trigonometrikus függvényeknél vezetjük be ezeket a fogalmakat. Hétköznapi nyelven fogalmazva, a periódus a legrövidebb idő, mely ahhoz kell, hogy a függvény egy teljes ciklust megtegyen. Kicsit pontosabban, a legrövidebb intervallum, ami után a függvény értékei ismétlődnek. Az amplitúdó vagy a periodikus függvény kitérése a függvény maximum és minimum értékei közti távolság fele. A középvonal a maximum és minimum értékek között húzódik félúton. E vízszintes egyenestől tér ki a függvény felfelé és lefelé is egy amplitúdóval. Ezeket a fogalmakat a *3. ábrán* szemléltettem. A fáziseltolás fogalmát egy kicsit később tárgyalnánk, mert általában nem azonos a vízszintes eltolás nagyságával. Matematika órán inkább maradjunk a vízszintes eltolás fogalmánál. A görbék rajzolásakor figyeljünk az arányokra. Az y-tengelyen az 1 és -1 jelenik meg, az x-tengelyen pedig π. Annak érdekében, hogy az ábránk arányos legyen, ügyeljünk rá hogy π körülbelül háromszor akkora, mint az 1.



3. ábra: Amplitúdó és periódus

Az $y = A\sin(Bx + C) + D$ a szinusz függvény általános alakja, melyből meghatározható a függvény amplitúdója, periódusa, a vízszintes eltolás nagysága és a középvonal. A függvénytranszformációkat vizsgálva láthatjuk, hogy A befolyásolja az amplitúdót, B a periódust, C a vízszintes eltolást befolyásolja, és D a középvonalat. A transzformáció legnehezebb része a vízszintes eltolás. azért, hogy ezt könnyebben érthetővé tegyük, és hogy a másodfokú egyenleteknél tárgyaltakkal összhangban legyen, nem a fent leírt általános alakot javaslom, hogy vizsgáljuk, hanem helyette tekintsük inkább az $y = A\sin\left(B(x-h)\right) + k$ alakot. Egyesével, példákkal illusztrálva beszéljük meg, hogy mely konstans hogyan és mennyivel befolyásolja a görbe jellemzőit. Használjuk a függvénytranszformációkat. Mindez jó alkalmat ad arra is, hogy a függvények ábrázolását gyakoroljuk.

Ezek alapján a következőket állapíthatjuk meg:

Ha $y = A\sin\left(B(x-h)\right)+k$, akkor

Amplitúdó $= |A|$

Periódus $= \dfrac{2\pi}{|B|}$

Középvonal: $y = k$

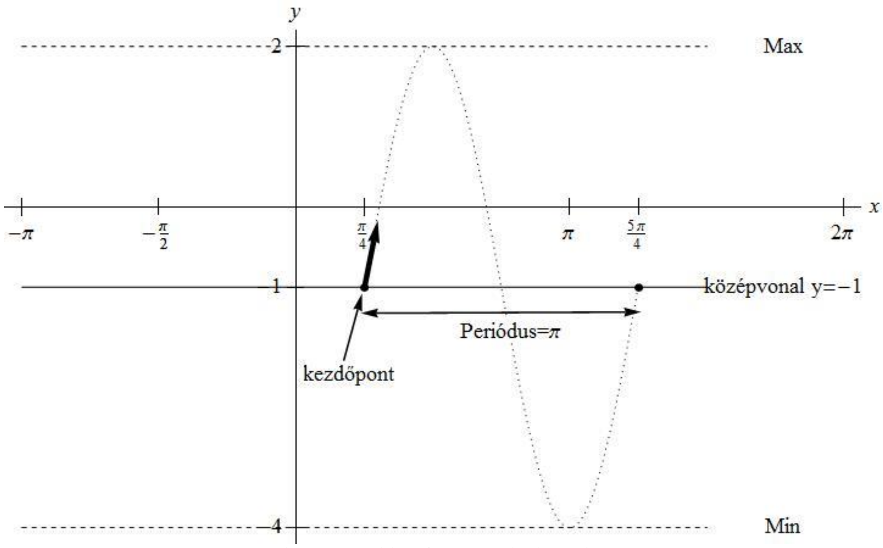
Vízszintes eltolás: h $\begin{cases} \text{jobbra ha } h \text{ pozitív} \\ \text{balra ha } h \text{ negatív} \end{cases}$

Ha ezek megvannak, akkor már csak arra kell figyelni, hogy mi történik, ha A vagy B negatív. Ezek hatását én nem szoktam elmagyarázni, mert ők maguk is rájönnek a feladatlapok megoldása közben. A koszinusz függvény jellemzése teljesen hasonló a szinusz függvényéhez. A tangens függvénynél értelemszerűen nincsen amplitúdó, maximum és minimum, de a többi jellemző itt is segít az adott függvény ábrázolásában.

Itt visszatérnék a fázis-eltolásra. Korábban említettem, hogy ez általában nem azonos a vízszintes eltolással, bár ezt nagyon sok könyvben sajnos azonos fogalmakként kezelik. A természettudományok területén gyakran nem az a lényeg, hogy milyen távolságra mozgatjuk el a görbét, hanem az, hogyan viszonyul ez a távolság a periódushoz. A fenti példában, ha $y = -2\cos\left(\pi x + \dfrac{\pi}{4}\right)+1$, akkor a vízszintes eltolás $-\dfrac{1}{4}$ egység, a fázis-eltolás viszont $\dfrac{\pi}{4}$.

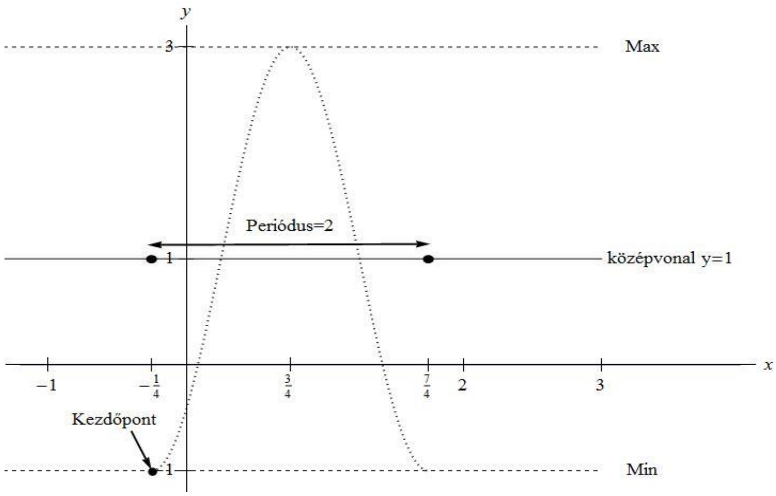
Nézzünk néhány példát.

1) Ábrázoljuk az $y = 3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)-1$ függvényt. A szinusz görbe középvonala $y=-1$ lesz, amplitúdója 4, tehát a függvény maximuma $-1+3=2$, minimuma pedig $-1-3=-4$. Periódusa $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. Ezeket könnyen le tudjuk olvasni a képletből. Végül a vízszintes eltoláshoz ki kell emelni az x együtthatóját: $y = 3\sin\left(2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)-1$, tehát vízszintesen $\dfrac{\pi}{4}$-gyel kell jobbra tolni. Ezekből az adatokból a *4. ábrán* megmutatjuk, hogyan tudjuk a függvényt ábrázolni. Berajzoljuk a középvonalat, valamint érdemes meghúzni a maximum és minimumot jelölő vízszintes egyeneseket is. A középvonalon bejelöljük a h helyét, és innét mérve egy periódus hosszát. Erre a szakaszra kell berajzolnunk a szinusz görbe egy periódusát, azaz pontosan egy teljes hullámot. Mivel A és B értékei pozitívok, ezért a szinusz görbét a $(h;k)$ pontból úgy indítjuk, mint ahogy a $y=\sin x$ indul az origóból.



4. ábra: Periodikus függvények ábrázolása 1.

2) Ábrázoljuk az $y=-2\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ függvényt. Először megkeressük a függvény jellemzőit: a periódusa $\frac{2\pi}{\pi}=2$, az amplitúdója $|-2|=2$, a középvonala $y=1$, így a függvény maximuma $1+2=3$, minimuma pedig $1-2=-1$. A vízszintes eltolás pedig $-\frac{1}{4}$, mert x együtthatóját kiemelve $y=-2\cos\left(\pi\left(x-\frac{-1}{4}\right)\right)+1$. Az *5. ábrán* szemléltettem az ábrázolás mentetét.



5. ábra: Periodikus függvény ábrázolása 2.

5.1. Feladatlap (Szögfüggvények ábrázolása)

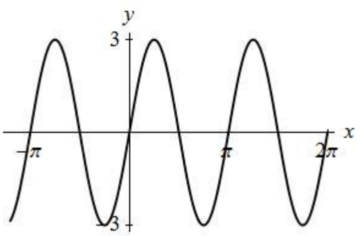
1) Határozza meg a függvény periódusát, amplitúdóját, a középvonalát, és a vízszintes eltolást.

a) $y=-3\sin 4x$ b) $y=2\cos(-4x)$ c) $y=3\sin\frac{\pi}{3}x$

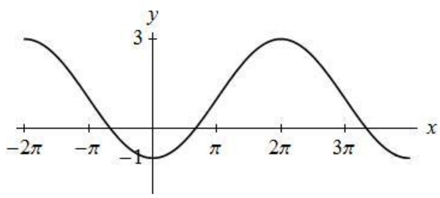
d) $y=2+3\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$ e) $y=1-5\cos(x-\pi)$ f) $y=\frac{1}{3}\cos(\pi-2x)-4$

2) A függvény grafikonjáról állapítsa meg a periódust, amplitúdót és középvonalat. Adjon meg lehetséges hozzárendelési szabályt a függvényre.

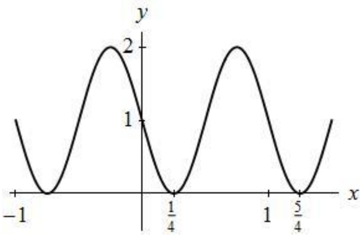
a)



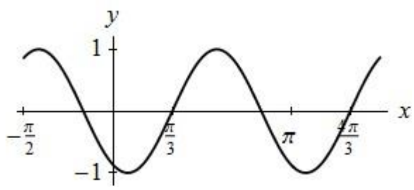
b)



c)



d)



3) Rajzolja meg a függvényeket.

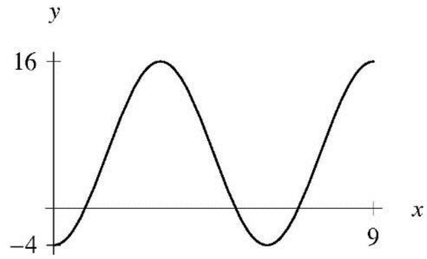
a) $y=\sin(4x)$ b) $y=\sin(4x-\pi)$

c) $y=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ d) $y=2\cot(x)+\frac{\pi}{4}$

e) $y=-2\sin(4x-\pi)+1$ f) $y=1+3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

g) $y=-2\cos(2x-\pi)$ h) $y=\left|3\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)\right|$

4) Állapítsa meg a *6. ábrán* megadott függvény hozzárendelési szabályát kétféleképpen: szinusz és koszinusz függvénnyel is.



6. ábra: Felmérő kérdés

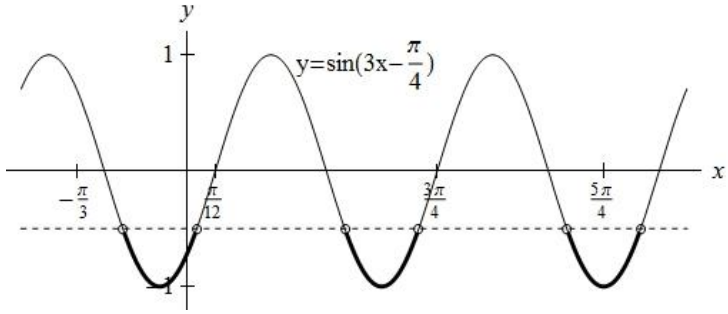
Megjegyzések a Szögfüggvények ábrázolása feladatlaphoz

A 3/h) feladat kapcsán érdemes megbeszélni, hogy az abszolút érték ebben az esetben hogyan befolyásolja a periódust. Kérjünk meg őket, hogy mondjanak példát olyan függvényre, amikor $g(x) = |f(x)|$ periódusa ugyanakkor marad, mint az $f(x)$ függvényé. Mondjanak olyan példát is, amikor $g(x) = |f(x)|$ periódusa fele akkora lesz mint $f(x)$-é.

Az utolsó feladat megint felmérő jellegű. Amikor ezt a feladatot én feladtam, és az anyagrésszel a diákoknak voltak még problémái, akkor a következő kérdések merültek fel: „Hogyan tudom meghatározni a periódus hosszát?", „A 9 az akkor most 9π-t jelent?", „Hogy lehet a periódus egész szám? Miért nem szerepel benne a π?", „Túl kevés az adat ahhoz, hogy a periódust meghatározzam." Nagyon lényeges, hogy ezekre a kérdésekre ne adjuk meg mi a válaszokat, hanem segítő kérdésekkel a diákot engedjük, hogy rájöjjön a megoldásra. Ha kell, korábbi feladatokra vissza kell térni (például a feladatlap 1/c és 2/c példái).

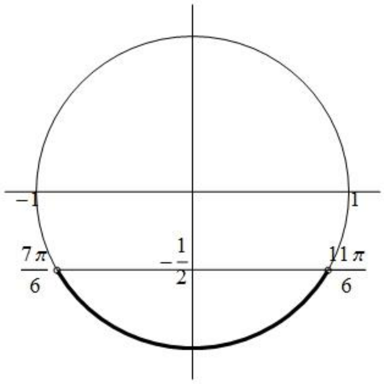
6. Trigonometrikus egyenlőtlenségek

A trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldására két lehetőségünk is van. Visszatérhetünk az egységkörhöz, vagy a függvény grafikonját hívhatjuk segítségül. Ha van rá idő, akkor érdemes mindkét módot megmutatni. A tankönyvek általában függvényábrázolással oldatják meg ezeket a feladatokat. Például a $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldásához az $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ függvényt ábrázoljuk a *7. ábrán*, és megkeressük azon x értékeket, melyekre a függvény az $y = -\frac{1}{2}$ egyenes alá esik. A nehézség a függvény ábrázolásában szokott lenni. Az intervallumon pontos meghatározása az egyenlőség megoldásával lehetséges.



7. ábra: Egyenlőtlenség megoldása függvényábrázolással

Egy másik megközelítés az egységkör használatával történik. A $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldásakor, első lépésben helyettesítjük az argumentumot, legyen $\alpha=3x-\frac{\pi}{4}$. A *8. ábrán* az egységkör segítségével megkeressük a körön azokat a szögeket melyekre teljesül a $\sin\alpha<-\frac{1}{2}$ egyenlőtlenség.



8. ábra: Egyenlőtlenség megoldása egységkörrel

Mivel a szinusz függvény 2π szerint periodikus, így az α -ra felírt egyenlőtlenség összes megoldása

$$\frac{7\pi}{6}+2k\pi<\alpha<\frac{11\pi}{6}+2k\pi,\quad \text{ahol } k\in\mathbb{Z}.$$

Ezután α helyére visszaírjuk a $3x-\frac{\pi}{4}$ -et,

$$\frac{7\pi}{6}+2k\pi<3x-\frac{\pi}{4}<\frac{11\pi}{6}+2k\pi,$$

és x -re megoldva az egyenlőtlenséget kapjuk a megoldást

$$\frac{17\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}<x<\frac{25\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3},\quad \text{ahol } k\in\mathbb{Z}.$$

A kevésbé szépen rajzoló diákoknak jobban szokott tetszeni ez az utóbbi megoldási módszer. Természetesen ennek is van nehézsége, mert az α szögre vonatkozó intervallumot helyesen kell felírni. Az ív végpontjait jelentő két szög nem feltétlenül esik a $[0;2\pi]$ intervallumba. Például $\sin\beta \geq -\frac{1}{2}$, megoldása

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq \beta \leq \frac{7\pi}{6}+2k\pi, \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Bármelyik módszert választjuk, mindenképpen ki kell térnünk tangenses egyenlőtlenségekre is, a tangens függvény értelmezési tartománya miatt.

6.1. Feladatlap (Trigonometrikus egyenlőtlenségek)

1) Oldja meg a valós számok halmazán

a1) $\sin(x)=\frac{1}{2}$ a2) $\sin(x)\geq\frac{1}{2}$ a3) $\sin(x)\leq\frac{1}{2}$

b1) $\cos(3x)=\frac{1}{2}$ b2) $\cos(3x)\geq\frac{1}{2}$ b3) $\cos(3x)\leq\frac{1}{2}$

c1) $2\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ c2) $2\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\geq\sqrt{2}$

c3) $2\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}$

d1) $\tan 4x=\sqrt{3}$ d2) $\tan 4x\leq\sqrt{3}$ d3) $\tan 4x\geq\sqrt{3}$

2) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ egyenletet.

Megjegyzések a Trigonometrikus egyenlőtlenségek feladatlaphoz

A feladatokat sorokba rendeztem. Egyenletet már meg tudnak oldani, annak megoldása pedig segíti az egyenlőtlenség megoldását. A fent említett két módszer közül engedjük, hogy a diák a számára barátságosabb eljárást használja, viszont a megoldásához tartozó rajznak ott kell lenni minden feladatnál.

A 2. feladat ugyan egyenlet és nem egyenlőtlenség, mégis ennél a résznél ajánlom a tárgyalását, mert itt is használhatjuk a függvénytranszformációt a megoldás során. Rajzoljuk fel az $y=\sin x$ és $y=\cos x$ függvényeket és kérjük meg, hogy írják fel a szinusz függvényt a koszinusz függvény transzformáltjaként. Ez többféleképpen is lehetséges. A felírt összefüggés alapján át tudjuk írni az egyenlet bal oldalát koszinuszos függvényre, és így kapunk egy $\cos\alpha=\cos\beta$ vagy $\sin\alpha=\sin\beta$ típusú egyenletet, melyet már korábban megtanultunk megoldani. Tapasztalatom szerint a diákok egyszerűbbnek találják a $\cos\alpha=\cos\beta$ egyenletet megoldani, mint a $\sin\alpha=\sin\beta$ egyenletet. Jobb, ha így oldatjuk meg a feladatot, mintha a könyvből illetve függvénytáblázatban található szinusz-koszinuszos összefüggést használjuk. Ezzel a módszerrel gyakoroljuk az alapfüggvények gyors rajzolását és a vízszintes eltolást. Ők magunk tudnak így egy összefüggést felírni, mely növeli az önbizalmukat, nem kell képletekre emlékezni sem.

7. Alkalmazások

Külön fejezetet szentelnék az alkalmazásoknak, mert ezekkel tudjuk felkelteni a diákok érdeklődését. Gyakran felvetődő kérdés: miért is fontosak a trigonometrikus függvények? Hegyesszögű háromszögekre rengeteg példát találunk a magyar tankönyvekben és példatárakban, ezért ezekből itt nem idézek. A valós számokon értelmezett trigonometrikus függvényekre viszont nem nagyon van példa. Két alkalmazást szoktak említeni, a harmonikus rezgőmozgást és az egyenletes forgómozgást. Természetesen nagyon sok más példa is van például biológiából, földrajzból, műszaki életből is, ne csak a fizikára gondoljunk. A kedvenc példám az óriáskerék, aminek a tárgyalása sokkal izgalmasabb, mintha azt mondanám, hogy elemezzünk egy egyenletes forgómozgást. Ugyanaz, de a megfogalmazása mégis érdekesebb. Ezt a példát sokféleképpen lehet variálni, sokféle kérdést lehet vele kapcsolatban feltenni. Természetesen a vízi malom kerekére is át lehet fogalmazni a feladatot, vagy a kerékpáros gyerekek kedvéért a bicikli kerekére. Törekednünk kell arra, hogy mindenki számára találjunk olyan példát, ami alapján ő azt mondja, hogy valóban szükség van a trigonometrikus függvényekre és milyen jó, hogy ezt is tudjuk. Ebben a fejezetben összegyűjtöttem néhány példát, igyekszem széles spektrumát megmutatni az alkalmazásoknak, de természetesen még sokféle példát lehet találni. Paul Foerster Precalculus with Trigonometry Concepts and Applications című könyvében *([Foerster 2015])* külön fejezetet szentel ezen alkalmazásoknak. Ezek a feladatok alkalmasak egyéni házi feladatnak, vagy akár mini-projektnek, sőt projekt munka is kialakítható ezekből elindulva. A példák tárgyalása során lehetőség adódik arra is, hogy betekintést nyújtsunk a diákjainknak a matematikai modell-alkotás alapjaiba. Beszélhetünk arról, hogyan keletkeznek ezek az egyenletek, és az általunk felállított modell vajon mennyire pontosan tudja jellemezni a valóságot.

1) 2014-ig a világ legmagasabb óriáskereke a Singapore Flyer volt, mely 165 méter magas, 150 méter átmérőjű, egy körforgása 37 percig tart. A beszállási platform a földtől mérve 15 méter magasan 6 óra irányában van, a kerék az óramutató járásával ellentétes irányban halad. Egy teljes fordulat alatt, mennyi ideig lesz az utas a földtől legalább 30 méterre?

A feladat megismételhető más óriáskerekekkel is. 2014. márciusától a világ legmagasabb óriáskereke a High Roller Las Vegasban. Magassága 167,6 méter, átmérője 158,5 méter, és körülbelül 30 perc alatt fordul körbe.

2) Egy 4 méter átmérőjű vízikerék percenként 6-szor fordul körbe. A kerék tengelye a víz felszíne felett 1,5 méterre van. A kerék egy pontját megjelöljük, hívjuk ezt P pontnak. 2 másodperccel azután hogy a stoppert elindítjuk a P pont, az óramutató járásával ellentétesen forogva, eléri a legmagasabb pozícióját. Rajzolja fel annak a függvénynek a grafikonját, mely leírja a P pontnak a víz felszínétől mért távolságát az idő függvényében.

3) Az európai háztartásokban a feszültség az elektromos hálózatban a $V = 339\sin(100\pi t)$ függvénnyel adható meg, ahol t az idő másodpercekben. Az amerikai háztartásokban pedig a feszültség $V = 156\sin(120\pi t)$. Hasonlítsa össze a feszültséget a két területen a feszültségek maximumát és a frekvenciáját (egy másodperc alatt megtett ciklusok számát) vizsgálva.

4) Egy állatfaj egyedeinek száma szinuszosan oszcillál: legkevesebb egyedszáma 700, mely január 1-én volt; legtöbb pedig 900 egyed volt július 1-én. Írjuk le képlettel a populáció nagyságát a t idő függvényében, ahol t jelölje a hónapok számát az év eleje óta.

5) Az egész világon a Fundy-öbölben a legerősebb az árapály mozgása, az apály és dagály közti szintkülönbség elérheti a 16–20 métert is, az eddig mért legnagyobb különbség pedig 21,6 méter volt.
Egy bizonyos pontnál a víz mélysége $y = D + A\cos(B(t-C))$ méter, t idő függvényében, ahol t az idő éjféltől órákban mérve. Feltéve, hogy két egymást követő dagály között eltelt idő 12,4 óra, és az apály és dagály közti átlagos szintkülönbség 18 méter, válaszoljunk a következő kérdésekre. Mi a D jelentése? Mennyi az A értéke? Mennyi a B értéke? Mi a C jelentése?

6) Biológusok egy adott élőhelyen élő ragadozók és zsákmány-állatok egyedszámát szinuszos függvénnyel közelítik. Az egyik tanulmányban a nyulak számát a $R(x) = 15000\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)+25000$ függvény írja le. Míg ugyanezen az élőhelyen a farkasok számát a $W(x) = 2000\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+5000$ függvény adja meg. Mindkét esetben x az időt jelenti, hónapokban mérve. A függvényeket ábrázolva, jellemezze az adott környezetben élő nyulak és farkasok számát, valamint egymáshoz való viszonyukat. [Regent Exam]

7) A napsugarak beesési szöge (a talajjal bezárt szöge) változik az év során. Ennek a szögnek a változása befolyásolja az épületek felmelegedését és lehűlését. Egy ház tetejének túlnyúlását úgy tervezik meg, hogy nyáron árnyékolni tudja az ablakot, viszont télen engedje be a napsugarakat a házba, hogy azok melegítsék a lakást. Magyarországon a déli napsugár beesési szögét közelíthetjük a

$$\text{Beesési szög (fokokban)} = -23.5\cos\left(\frac{1}{365}(2\pi x+63)\right)+47$$

képlettel, ahol x jelöli, hogy az évben hányadik napnál vagyunk, tehát $x=1$ jelöli január elsejét, $x=2$ pedig január másodikát, és így tovább. Számítsa ki, hogy Valentin napon déli 12 órakor mekkora a nap beesési szöge. Mikor lesz a legnagyobb a beesési szög az év során? *[Regent Exam]*

8) Az állatok napi ritmusa trigonometrikus függvényekkel modellezhető. Bár nincsen olyan általános egyenlet, mely minden napi ritmust leírna, a biológusok és matematikusok adatokat gyűjtenek, melyek segítségével megalkotják a lehető legjobb modellt. Tekintsük a következő képzeletbeli esetet. Tegyük fel, hogy egy bizonyos állatfaj testhőmérséklete a nap folyamán változik, és a következő egyenlettel közelíthető

$$T(t) = 36.8 - 1.3\sin\left(\frac{\pi}{12}(t+2)\right),$$

ahol T jelöli a hőmérsékletet °C-ban, t jelöli az időt órákban, és $t=0$ tartozik az éjfélhez [Biomath]. A következő kérdéseket tehetjük fel a példával kapcsolatban. Mennyi a testhőmérséklet éjfélkor? Mennyi a testhőmérsékletet leíró függvény periódusa? A nap folyamán mikor éri el a maximumot?

9) Magyarországon a napfénytartam napi összege július 4-én a legmagasabb, 10,89 óra, és januárban a legalacsonyabb, 0,47 óra. Feltéve, hogy a napi napfénytartam trigonometrikus függvényekkel modellezhető, mikor kellene elültetnünk a kertbe egy olyan növényt, melynek átlagosan 8 óra napsütés kell naponta?

10) A külső hőmérséklet értéke egy nap folyamán szinuszos függvénnyel modellezhető. Ha a napi hőmérséklet 17ºC és 30ºC között változik úgy, hogy éjfélkor van 17ºC, mikor éri el a hőmérséklet a 21ºC-ot?

Az Országos Meteorológiai Szolgálat honlapjáról (met.hu) az ország időjárásáról nagyon sok adat letölthető. Ezeket felhasználva a fenti feladathoz hasonló feladatokat írhatunk, vagy projektként feldolgozhatjuk. Használhatjuk például, hogy a 1991-től 2000-ig mért adatok alapján 10 éves napi átlagokkal számolva, a napi középhőmérséklet minimuma $-1,43$ ºC, melyet december 26-án ér el, a maximum pedig 24,5ºC, melyet augusztus 3-án ér el. Nem pontosan egy félév telik el a minimum és maximum helyek között. Használható-e a szinuszos modell, ha igen, akkor miért és hogyan? Érdemes az adatokat ábrázoltatni, megnézni, hogy tényleg szinuszos modellt követ-e a napfénytartam, vagy napi átlaghőmérséklet, illetve hogy az általunk kiszámolt érték mennyire illeszkedik a valósághoz. Az ilyen feladatok már projektként kitűzhetők az érdeklődő diákoknak.

8. Összefoglalás

A trigonometrikus függvények tanítása során nagyobb hangsúlyt kellene kapni az egységkörös ábrázolásnak, mert ezáltal mélyül el a diákok ismerete a trigonometrikus függvényekről. Meg kell teremtenünk az átmentet a mechanikus számolásoktól melyet a derékszögű háromszögekben alkalmazunk a függvényekig, és el kelleme jutni oda, hogy függvényekként tekintsenek rájuk. Az analízis oldaláról alaposabban kell tárgyalnunk ezt a témakört. Viszont az sem lenne elegendő, ha csak ez utóbbi megközelítést alkalmaznánk, kutatási eredmények mutatják, hogy mindkét módszerre szükség van, mert a két tárgyalási mód egymást segíti. E témakör tanítása nagyon sok kapcsolódási pontot nyújt más matematikai témakörökkel, ezeket mindenképpen érdemes kihasználnunk. Ahogy bemutattam, vannak feladatcsoportok, melyek többféleképpen is megoldhatók, a különböző megoldások szintén elmélyíti a tudásukat. Az utolsó fejezetben pedig kitértem arra, hogy a diákok érdeklődésének felkeltésére számos és igen változatos alkalmazást találhatunk nem csak derékszögű háromszögekre, hanem a valós trigonometrikus függvényekre.

Felhasznált irodalom

Ambrus András (1995): Bevezetés a matematikadidaktikába. ELTE Eötvös Kiadó. Budapest.

Biomath [online]. http://www.biology.arizona.edu/biomath/tutorials/trigonometric/Applications/CR.html [2015.05.01.]

Foerster, Paul. A. (2012): Precalculus with Trigonometry Concepts and Applications. Chapter 6. Section 5. Key Curriculum Press.

Kendal, Margaret, Stacey, Kaye (1996): Trigonometry: Comparing ratio and unit circle methods. In P. Clarkson (Ed.) Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics education Research group of Australasia. 1996. pp. 322–329.

Kendal, Margaret, Stacey, Kaye (1998): Teaching Trigonometry. Australian Mathematics Teacher. v54 n1. Mar 1998. pp. 34–39.

Kupková, Erika (2005): Radians versus Degrees. Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics. Issue 5. 2005. pp. 85–94.

Regent exam: Practice [online] http://www.regentsprep.org/regents/math/algtrig/att7/graphpractice3.htm. [2015.05.01.].

Touch of Mathematics Trigonometry [online] http://www.touchmathematics.org/topics/trigonometry. [2015.05.01.]

Weber, Keith (2008): Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research. Mathematics Teacher. Vol 102. No 2. September 2008. pp. 144–150.